

UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA

ISEG-INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

Tese de doutoramento em Matemática Aplicada à Economia e Gestão

.

As Transformadas de Fourier e Laplace na Teoria do Risco

Jorge Manuel Afonso Garcia

Orientadores: Prof. Doutora Maria de Lourdes Centeno

Prof. Doutor Alfredo Egídio dos Reis

2004

Conteúdo

1	O modelo clássico de risco	10
1.1	Introdução	10
1.2	Descrição do modelo	10
1.3	Principais resultados da Teoria da Ruína no modelo clássico	14
1.3.1	Ruína em tempo contínuo e horizonte infinito	14
1.3.2	A gravidade de ruína	16
1.3.3	Ruína em tempo contínuo e horizonte finito	17
2	O modelo de renovamento	18
2.1	Introdução	18
2.2	Descrição do modelo	18
2.3	Principais resultados da teoria da ruína no modelo de renovamento	21
2.3.1	Ruína em tempo contínuo e horizonte infinito	21
2.3.2	Ruína em tempo contínuo e horizonte finito	22
3	As transformadas de Laplace e Fourier	23
3.1	Introdução	23
3.2	Definição da transformada de Laplace	24
3.3	Propriedades fundamentais da transformada de Laplace	24
3.4	A transformada inversa de Laplace	26
3.5	Definição da transformada de Fourier	27
3.6	Propriedades da transformada de Fourier	27
3.7	A inversão da transformada de Fourier	29
3.8	As transformadas de Fourier do cosseno e do seno	30
3.9	Propriedades da transformada do cosseno	30
3.10	Algumas extensões à transformada do cosseno	32
3.10.1	A transformada do cosseno modificada	32
3.10.2	Uma generalização a vectores aleatórios	33
3.10.3	A inversão das transformadas de Fourier e Laplace pela transformada do cosseno	34
4	Aplicação das transformadas nas distribuições agregadas	37
4.1	Introdução	37
4.2	Distribuições agregadas no processo de Poisson composto	38
4.3	Distribuições no processo de renovamento composto	41
4.3.1	Função característica do processo de contagem	41

4.3.2	Função característica da distribuição agregada	46
5	Aplicação das transformadas na teoria da ruína	48
5.1	Introdução	48
5.2	Cálculo da probabilidade de sobrevivência pela perda agregada máxima	49
5.3	A fórmula de Seal em horizonte infinito	51
5.3.1	Exemplos	53
5.4	A distribuição do tempo de ruína	56
5.4.1	A transformada de Laplace da função ϕ	56
5.4.2	A transformada de Laplace de $\sigma(u, t)$	58
5.4.3	A inversão complexa de $\tilde{\sigma}(\delta, s)$	59
5.5	Uma alternativa assintótica à equação de Seal	72
5.6	Ruína eventual no modelo de Erlang $(2, \beta)$	73
6	Cálculo prático de probabilidades de ruína	76
6.1	Introdução	76
6.2	Probabilidade de ruína eventual no modelo clássico	78
6.3	Probabilidade de ruína eventual no modelo de Erlang $(2, \beta)$	81
6.4	Probabilidade de sobrevivência em tempo finito no modelo clássico	84
7	Outras aproximações à probabilidade de ruína	89
7.1	Introdução	89
7.2	Aproximação por incrementos sucessivos	90
7.3	Uma aproximação rápida para a probabilidade de ruína eventual	92
7.4	Fórmula recursiva para a probabilidade de ruína em tempo finito	94
7.5	Desenvolvimento em série de $\sigma(u, t)$	97
8	Algumas considerações finais	101

Lista de Tabelas

1	$\psi(u)$ - modelo Poisson / Exponencial	79
2	$\psi(u)$ - modelo Poisson / Gama	80
3	$\psi(u)$ - modelo Erlang / Exponencial	82
4	$\psi(u)$ - modelo Erlang / Gama	83
5	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Exp. - fórmula exacta e eq. de Seal	84
6	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Exp. - fórmula exacta e perca agregada	85
7	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Gama - fórmula exacta e eq. de Seal	86
8	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Gama - fórmula exacta e perca agregada	87
9	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Comb. exp. - fórmula exacta e eq. de Seal	88
10	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Exp. - fórmula recursiva	95
11	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Gama - fórmula recursiva	96
12	$\psi(u, t)$ - modelo Erlang / Gama - fórmula recursiva	97
13	$\psi(u, t)$ - modelo Poisson / Exp. - desenvolvimento em série	99
14	$\psi(u, t)$ - modelo Erlang / Exp. - desenvolvimento em série	99
15	$\psi(u, t)$ - modelo Erlang / Gama - desenvolvimento em série	100

Lista de Figuras

1	Trajectória para o processo de risco	12
2	O coeficiente de ajustamento no modelo clássico	14
3	O coeficiente de ajustamento no modelo de renovamento	20
4	Exemplo da equação fundamental de Lundberg	63
5	Equação fundamental de Lundberg - comb. de exp.	67
6	Aproximação assintótica à probabilidade de ruína em tempo finito	87

Glossário

Siglas e abreviaturas

- f. c.* - Função característica
- iid* - Independentes e identicamente distribuídas
- v.a.* - variável aleatória
- T.L.* - Transformada de Laplace

Notação

- c - Prémio por unidade de tempo
- $f(.)$ - Função de densidade das indemnizações particulares
- $F(.)$ - Função de distribuição das indemnizações particulares
- $g(.)$ - Função de densidade do tempo inter-ocorrências
- $G(.)$ - Função de distribuição do tempo inter-ocorrências
- $G_r(.,.)$ - Gravidade de ruína
- $h(.)$ - Função de densidade de um acréscimo de perca agregada m.
- $H(.)$ - Função de distribuição de um acréscimo de perca agregada m.
- i - Base dos números imaginários
- L - Perca agregada máxima no intervalo $(0, \infty)$
- $L(t)$ - Perca agregada máxima até ao instante t
- L_k - k^o incremento da perca agregada máxima
- $M(t)$ - Número de incrementos da perca agregada até ao instante t
- $N(t)$ - Número de sinistros até ao instante t
- $p_k(t)$ - Probabilidade de k ocorrências até ao instante t
- $Q(.,.)$ - Dupla transformada de Fourier
- R - Coeficiente de ajustamento
- $S(t)$ - Indemnizações agregadas no intervalo $(0, t]$
- T - Instante de ruína ou Tempo de ruína
- u - Reserva inicial
- $U(t)$ - Reserva no instante t
- X_k - Montante da k^a indemnização
- λ - Parâmetro do processo de Poisson
- μ - Valor esperado do montante de sinistro
- ρ - Carga de segurança
- $\sigma(.)$ - Probabilidade de não ruína como função da reserva inicial
- $\sigma(., t)$ - Probabilidade de sobrevivência em $(0, t]$
- $\psi(.)$ - Probabilidade de ruína como função da reserva inicial
- $\psi(., t)$ - Probabilidade de ruína em $(0, t]$
- $\phi(u)$ - Transformada de Laplace do tempo de ruína

Agradecimentos

Em primeiro lugar, quero manifestar um agradecimento muito especial aos meus supervisores Lourdes Centeno e Egídio dos Reis pela sua ajuda, sugestões e encorajamento ao longo das investigações desenvolvidas, bem como na crítica sempre construtiva aos trabalhos publicados ou apresentados. Uma palavra muito especial é também devida à colega de trabalho Fátima Lima, pela sua preciosa ajuda na re-programação de alguns dos algoritmos apresentados, assim como nos testes e conferência dos numerosos algoritmos desenvolvidos e de diversas variantes dos mesmos, tendentes a melhorar a sua fiabilidade e precisão. A toda a minha família, com especial referência a minha mulher, para quem este trabalho representou ao longo de quatro anos muitos e diversos sacrifícios, devo também um especial agradecimento, sabendo de antemão que sem a sua preciosa ajuda não teria sido possível levar esta tarefa a bom porto. Por fim, um sincero obrigado a todos os meus colegas e amigos, que nunca deixaram de me incentivar e apoiar e que suportaram ao longo deste período numerosas ausências ou presenças de humor no mínimo duvidoso.

Resumo

São por demais conhecidas as aplicações de *transformadas* em diversos ramos da ciência e da engenharia. Em particular, na *teoria colectiva do risco*, as transformadas de Fourier e Laplace têm uma importância acrescida, não só devido à natureza estocástica do processo de risco e das suas componentes, como também pelo facto de variadas soluções, para grande parte dos problemas que se colocam em torno deste tipo de processos, se apresentarem sob a forma de equações diferenciais ou integro-diferenciais, com especial relevo para as equações de renascimento, para resolução das quais aquelas transformadas são fundamentais. A obtenção unívoca de uma determinada função, ou de um seu valor particular, por inversão algébrica ou numérica da respectiva transformada, uma vez encontrada esta, constituiu um dos principais objectivos do trabalho de investigação desenvolvido. Desde a determinação de distribuições agregadas de sinistros, tanto no modelo clássico como em modelos de renascimento, até à determinação de probabilidades de ruína em horizonte finito ou infinito, o presente trabalho procura acentuar as potencialidades da investigação nesta área, bem como a necessidade de aprofundar o papel directo ou indirecto das duplas transformadas, por vezes implícitas, e das fórmulas de inversão complexas disponíveis, tanto sob o ponto de vista analítico, como do ponto de vista prático e numérico. Sobre este último domínio, importa por um lado sublinhar a importância das transformadas do Coseno e do Seno na inversão da transformada de Fourier, para funções não negativas, as quais, embora conhecidas, têm sido pouco referidas na literatura actuarial, tanto quanto nos é dado conhecer, bem como a necessidade de construir algoritmos de integração numérica potentes, rápidos e precisos, especialmente adaptados à integração de funções circulares, ou funções de rápida oscilação, em intervalos de dimensão por vezes elevada, quando não infinita. Foi este, aliás, um dos objectivos iniciais da investigação prosseguida, que se viria a revelar bastante compensador, pela qualidade dos resultados alcançados, através da construção de um algoritmo arborescente que apelidamos de Integral Dicotómico, o qual se encontra descrito em anexo.

Palavras-chave: modelo clássico de risco; modelo de renascimento; transformada de Laplace; transformada de Fourier; transformada do coseno; probabilidade de ruína; ruína em tempo finito; tempo de ruína.

Abstract

Mathematical transforms and their applications are well known tools and widely used by scientists, engineers and actuaries. In the Collective Risk Theory, Fourier and Laplace transforms have an extra importance due to the stochastic nature of the usual models, either classical or non classical, also to the fact that a great variety of problems emerging from those models have solutions that appear as differential or integral-differential equations, from which renewal equations are the most interesting example. The main goal of this research is the search of an analytic expression for a function, or a particular value by complex or numerical inversion of its transform. The work starts with the study of characteristic functions of the aggregate claims process, either classical or the more general renewal model, goes through the evaluation of survival and ruin probabilities, and wants to enhance a deeper research on these topics using tools as the double Laplace and Fourier transforms. A special attention has been devoted to cosine and sine transforms of non-negative functions. Although well known, they are not frequently referenced in the actuarial literature, however their properties for numerical inversion of Fourier transforms are fundamental. For that purpose, the development of a good algorithm of integration was necessary, a goal which we have achieved successfully by developing the dichotomic approach described in the Appendix.

Keywords: modelo clássico de risco; modelo de renovamento; transformada de Laplace; transformada de Fourier; transformada do coseno; probabilidade de ruína; ruína em tempo finito; tempo de ruína.

Prefácio

Nesta tese procuramos evidenciar a importância crescente, diríamos mesmo fundamental, das transformadas de Fourier e de Laplace em aplicações algébricas ou numéricas de carácter actuarial, com especial relevo para o processo clássico de risco e, em particular, para a teoria da ruína, um dos principais ramos da teoria do risco. Sem pretendemos ser exaustivos, tal seria impossível num trabalho desta natureza, até pela abundante literatura e trabalhos de investigação existentes em torno destas matérias, procurámos todavia construir diversos exemplos, quer de aplicação numérica, quer algébrica, destas transformadas e das diferentes fórmulas de inversão que se lhes podem aplicar, estando convictos que alguns dos resultados alcançados incentivarão novas e profícuas incursões neste vasto domínio da matemática. Devemos salientar ainda que grande parte do trabalho desenvolvido não teria efeitos práticos significativos, caso não dispozéssemos de micro-computadores relativamente potentes e de *software* matemático adequado, com especial relevo para os produtos *Workplace* e *Maple*. No Anexo IV fornecemos, a título exemplificativo, alguns dos programas utilizados por recurso a *Maple*.

No primeiro capítulo fazemos uma descrição sucinta do modelo clássico de risco, bem como um resumo dos principais resultados existentes na teoria da ruína para este tipo de modelo. No segundo capítulo introduzimos o modelo de renovamento, assim como os resultados mais salientes da teoria da ruína aplicáveis a este modelo. No terceiro capítulo efectuamos uma abordagem sintética das transformadas de Fourier e de Laplace, das transformadas de Fourier do coseno e do seno, assim como algumas extensões destas transformadas necessárias às aplicações práticas que serão desenvolvidas nos restantes capítulos. No quarto capítulo procuramos dar alguns exemplos de aplicação das transformadas nas distribuições agregadas, enquanto o quinto capítulo é dedicado inteiramente à aplicação de soluções algébricas das principais equações da teoria da ruína. No sexto capítulo damos alguns exemplos de inversão numérica, por recurso ao integral dicotómico explicado no Anexo II. No sétimo capítulo procuramos dar alguns contributos para o cálculo aproximado de probabilidades de ruína, os quais, não exigindo a aplicação directa das transformadas nos algoritmos desenvolvidos, constituem instrumentos de cálculo rápido para uma primeira aproximação daquelas probabilidades. Devemos salientar ainda que, neste capítulo, fornecemos dois algoritmos que consideramos importantes para o cálculo da probabilidade de sobrevivência em tempo finito, os quais são aplicáveis tanto ao modelo clássico como a modelos de renovamento ordinários. Os dois teoremas apresentados permitem aproximações precisas daquelas probabilidades, se bem que a abtenção de resultados numéricos dependa da natureza das distribuições das indemnizações consideradas, assim como da capacidade de memória e da velocidade da unidade central de processamento do computador utilizado. A fechar o presente texto, apresentamos no oitavo capítulo as principais conclusões do trabalho desenvolvido e tentamos fornecer algumas pistas para posterior investigação das diferentes matérias tratadas nesta tese.

Devemos notar que a maioria dos teoremas e outras proposições apresentadas não se encontram demonstrados, até porque as respectivas demonstrações podem ser visualizadas ou verificadas nas referências indicadas. Como excepção a esta regra, demonstraremos as proposições que, pela forma como procedemos ao seu desenvolvimento, nos pareceram originais.

Capítulo 1

O modelo clássico de risco

1.1 Introdução

Neste capítulo efectuamos uma descrição sucinta do modelo clássico de risco, abundantemente tratado na literatura actuarial, bem como da sua aplicação na teoria da ruína, uma das componentes mais interessantes da teoria do risco. Devemos salientar mais uma vez que os resultados apresentados neste capítulo estão longe de abordar e abranger o universo existente, pretendendo somente contribuir para uma melhor compreensão e enquadramento do corpo principal desta tese.

Na secção 1.2 apresentamos as principais características do presente modelo, assim como uma descrição dos processos estocásticos que o suportam. Introduzimos as noções de *coeficiente de ajustamento*, *ruína*, *instante de ruína*, *probabilidade de ruína*, *probabilidade de sobrevivência* e são elencados os principais problemas que a teoria da ruína procura resolver.

A secção 1.3 é dedicada exclusivamente aos principais resultados conhecidos da teoria da ruína para este modelo.

1.2 Descrição do modelo

O modelo clássico de risco tem por base o processo composto de Poisson e resumidamente, caracteriza-se por:

- I - O número de sinistros segue um processo de Poisson homogéneo com parâmetro λ .
- II - As indemnizações são consideradas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (*iid*).
- III - O processo de contagem de sinistros é independente das indemnizações ocorridas.
- IV - O encaixe de prémios por unidade de tempo é constante.

Notamos que na sua descrição detalhada e rigorosa respeitaremos de perto as notações de Bowers et al. (1997 capítulo 13).

Consideremos um processo estocástico $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, com

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

onde $U(t)$ representa o capital (ou reserva de risco) de um dado risco de uma empresa de seguros no instante t , $u = U(0)$ o capital (ou reserva de risco) inicial, c o prêmio encaixado por unidade de tempo e a variável aleatória $S(t)$ o montante agregado de indemnizações por sinistros verificados no intervalo $(0, t]$. O montante agregado das indemnizações dá origem também a um processo estocástico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, com

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{N(t)} X_k & \text{se } N(t) > 0 \\ 0 & \text{se } N(t) = 0. \end{cases}$$

onde $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de variáveis aleatórias *iid*, correspondentes às indemnizações individuais ou particulares, ou seja X_k representa a indemnização correspondente ao k° sinistro, e em que a variável aleatória $N(t)$ representa o número de sinistros verificados no intervalo $(0, t]$. Considera-se ainda que as indemnizações particulares são *v.a.* independentes de $N(t)$. Como anteriormente se disse, neste modelo, o processo de contagem $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, é um processo de Poisson homogêneo de parâmetro λ .

Adicionalmente, são admitidos os seguintes pressupostos:

1. as indemnizações individuais X_k têm função de distribuição $F(x)$, com $F(0) = 0$ (não se consideram portanto montantes negativos ou nulos) e, no caso de continuidade, função densidade $f(x) = F'(x)$. A função característica será representada, em geral, por $\omega(s)$;
2. $\mu = E(X_k)$ existe;
3. $c > \lambda\mu$, o que pressupõe uma carga de segurança $\rho = c/\lambda\mu - 1 > 0$.

Sob as hipóteses anteriormente admitidas, verifica-se que, caso não haja interrupção no processo ao longo do tempo e considerando que existe o segundo momento de X_k , $U(t) \rightarrow \infty$ com t . Com efeito, fixado t , a variável aleatória $U(t)$ tem para valor esperado e variância, respectivamente,

$$\begin{aligned} \mu_t &= u + \rho\lambda\mu t \quad \text{e} \\ \sigma_t^2 &= \lambda t \alpha_2, \end{aligned}$$

com $\alpha_2 = E(X_k^2)$. Como é sabido, por aplicação do teorema limite central, prova-se que $S(t)$ e $U(t)$ são assintoticamente normais, pelo que, para qualquer valor M finito e t suficientemente elevado, é válida a relação

$$p(t) = P[U(t) \leq M] = P\left[\frac{U(t) - \mu_t}{\sigma_t} \leq \frac{M - \mu_t}{\sigma_t}\right] = \Phi\left(\frac{M - \mu_t}{\sigma_t}\right),$$

onde $\Phi(\cdot)$ representa a função de distribuição normal $(0, 1)$. Tomando limites na expressão anterior quando $t \rightarrow \infty$, teremos,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{M - u - \rho\lambda\mu t}{\sqrt{\lambda t \alpha_2}}\right) = \Phi(-\infty) = 0,$$

o que demonstra a afirmação.

Apesar do teor da proposição anterior, $U(t)$ pode temporariamente (isto é, em intervalos de tempo finitos e em número finito) apresentar valores negativos.

Diz-se que ocorre ruína no instante s , se a reserva desce abaixo de zero, pela primeira vez, naquele instante. Dado que $U(t) \rightarrow \infty$ com t , a recuperação após ruína é um acontecimento certo, ainda que a reserva após recuperação possa voltar a ser negativa durante um ou mais intervalos de tempo, necessariamente finitos. Na figura 2 apresentamos uma trajectória possível para este modelo.

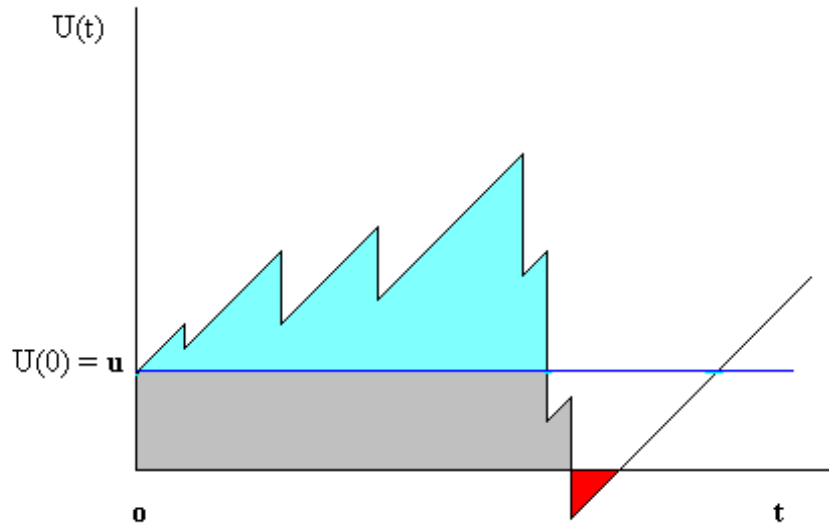


Figura 1

Tanto em *horizonte* finito como infinito, existe abundante literatura sobre a teoria da ruína, a qual se debruça essencialmente sobre quatro aspectos:

1. determinação da probabilidade de ruína num determinado horizonte temporal (finito ou infinito);
2. determinação da função de distribuição do tempo que decorre até ao instante de ruína, ou dos seus momentos;
3. quais as distribuições do montante que causou ruína e das reservas antes e após o instante de ruína;
4. qual a distribuição do tempo de recuperação após o instante de ruína.

Grande parte das soluções para estas questões bem como as principais proposições e resultados que vamos utilizar ao longo deste capítulo podem ser consultadas em (Gerber 1979), (Gerber, Goovaerts & Kaas 1987), (Dufresne & Gerber 1988), (Egídio dos Reis 1993), (Egídio dos Reis 2002), (Centeno 2001), (Dickson 1992), (Dickson 1993) e (Gerber & Shiu 1998).

Embora, como iremos constatar, as transformadas de Fourier e Laplace atravessem toda a teoria do risco e da ruína, debruçar-nos-emos especialmente sobre as duas primeiras questões, tentando ao mesmo tempo simplificar a abordagem de alguns algoritmos existentes, ou criando outros que se mostrem mais adequados à utilização das propriedades das transformadas, com especial relevo para aqueles que permitem a sua inversão algébrica ou numérica. Aliás, cabe neste ponto referir que, muitos dos algoritmos e técnicas utilizadas, são extensíveis às duas últimas questões, embora a sua aplicação requiera uma investigação adicional com o necessário tempo e detalhe.

No texto que segue, a probabilidade de ruína no intervalo $(0, t]$, partindo de uma reserva inicial $U(0) = u$, será representada por $\psi(u, t)$ e a probabilidade de sobrevivência, isto é, a probabilidade de não haver ruína naquele intervalo, por $\sigma(u, t) = 1 - \psi(u, t)$. A probabilidade de ruína eventual no intervalo $(0, \infty)$ será representada por $\psi(u) = \psi(u, \infty)$ e a probabilidade de não ruína por $\sigma(u) = \sigma(u, \infty) = 1 - \psi(u)$. A variável aleatória correspondente ao instante de ruína será designada por T e define-se da seguinte forma:

$$T = \begin{cases} \inf [t : t \geq 0 \text{ e } U(t) < 0] \\ \infty \text{ se } U(t) \geq 0 \text{ para todo o } t > 0 \end{cases}.$$

Verifica-se facilmente que a distribuição de T é contínua e tem um ponto impróprio de acumulação sempre que $\sigma(u) > 0$.

Considere-se agora $L(t)$ a perca agregada máxima até ao instante t e L a perca agregada máxima em $(0, \infty)$. Ter-se-á então,

$$L(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} [S(\tau) - c\tau], \quad (1.2)$$

e

$$L = L(\infty). \quad (1.3)$$

Note-se em primeiro lugar que $L(0) = 0$. Como valor máximo ao longo do tempo, $L(\cdot)$ apenas pode ter incrementos positivos (caso estes venham a ocorrer). Considerando então $L_0 = L(0) = 0$ e $L_k, k = 1, 2, \dots$ os incrementos ordenados em relação a t , correspondentes aos máximos de $L(t)$ sucessivamente atingidos, verifica-se que $L = \sum_{k=0}^M L_k$, onde M é uma variável aleatória que representa o número de incrementos em $(0, \infty)$. Prova-se ainda que, neste modelo, $\{L_k\}_{k=1,2,\dots}$ é uma sequência de variáveis aleatórias *iid*, com função de distribuição $H(x)$ e função densidade $h(x)$ dada pela expressão,

$$h(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu}, \quad x \geq 0. \quad (1.4)$$

A demonstração pode ser vista em (Bowers, Gerber, Hickman, Jones & Nesbitt 1997) ou (Egídio dos Reis 1999).

Nalgumas partes do texto suporemos ainda que existe a função geradora de momentos de X_k , $m(r) = E[\exp(rX_k)]$, definida no intervalo $(-\infty, \eta)$. Suporemos ainda que $\eta > 0$ (podendo ser infinito) e que $\lim_{r \rightarrow \eta} [m(r)] = \infty$. Nestas condições, prova-se que, ver por exemplo

(Gerber 1979), existe o coeficiente de ajustamento R , o qual é definido para este modelo como a única raiz positiva da equação

$$cr + \lambda = \lambda m(r), \quad (1.5)$$

e que tem vasta aplicação na teoria da ruína como teremos ocasião de verificar.

Devemos salientar porém que, considerando não a função geradora de momentos, mas a sua expressão algébrica estendida ao intervalo $(-\infty, \infty)$, a equação (1.5) pode ter outras raízes positivas, sendo que nesse caso, o coeficiente de ajustamento corresponde à primeira raiz à direita da origem.

Exemplo 1.1 *Se as indemnizações particulares tiverem distribuição Gama(2,4), a função geradora de momentos é dada pela igualdade $m(r) = [4/(4-r)]^2$, com $r < 4$. Considerando $\lambda = 1$ e $c = 1.5$, a equação (1.5) possui as raízes $\{r = 0\}$, $\{r = 2.0\}$, e $\{r = 5 + 1/3\}$. Separando os dois lados da equação anterior obtemos o seguinte gráfico:*

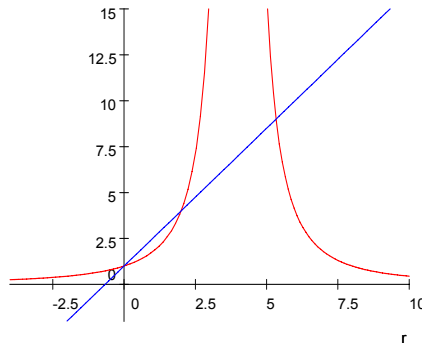


Figura 2

Neste caso $R = 2$ e nota-se pelo próprio gráfico que a equação (1.5) apresenta outra raiz positiva, a qual no entanto, sendo superior a 4, não pertence ao domínio da função geradora considerada.

1.3 Principais resultados da Teoria da Ruína no modelo clássico

1.3.1 Ruína em tempo contínuo e horizonte infinito

Uma importante abordagem e aproximação para a probabilidade de ruína $\psi(u)$, vem dada pelo teorema que segue.

Teorema 1.1 *Para $u \geq 0$,*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < \infty]}, \quad (1.6)$$

onde R designa o coeficiente de ajustamento anteriormente definido.

A demonstração deste teorema e do corolário seguinte pode ser vista em (Gerber 1979)..

Corolário 1.1.1 *Desigualdade de Lundberg*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (1.7)$$

Note-se contudo que, para valores de u próximos de zero, a desigualdade anterior fornece um fraco majorante para a probabilidade de ruína.

Teorema 1.2 *Para $u > 0$,*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \left\{ \psi(u) - \int_0^u \psi(u-x) dF(x) - [1 - F(u)] \right\}, \quad (1.8)$$

e

$$\sigma'(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\sigma(u) - \int_0^u \sigma(u-x) dF(x) \right]. \quad (1.9)$$

As expressões precedentes permitem determinar, com relativa simplicidade, as transformadas de Fourier de $\psi(u)$ ou de $\sigma(u)$, a partir das quais, por inversão algébrica ou numérica, podemos obter as respectivas probabilidades. Alguns exemplos de aplicação deste teorema podem ser vistos em (Lima, Garcia & Egídio dos Reis 2002) os quais serão retomados no capítulo 6, por uma questão de refinamento dos algoritmos utilizados e da precisão alcançada. Do teorema anterior pode também deduzir-se o seguinte teorema:

Teorema 1.3 *Para $u \geq 0$,*

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty [1 - F(x)] dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - F(x)] \psi(u-x) dx, \quad (1.10)$$

e

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - F(x)] \sigma(u-x) dx. \quad (1.11)$$

Tal como para o teorema anterior, também neste caso é possível determinar as transformadas de Fourier de $\psi(u)$ ou de $\sigma(u)$. Com base neste teorema e na desigualdade de Lundberg, deduz-se ainda o seguinte teorema:

Teorema 1.4 *Partindo de uma reserva inicial nula, as probabilidades de ruína e sobrevivência vêm dadas, respectivamente, pelas expressões*

$$\psi(0) = \frac{\lambda}{c} \mu, \quad (1.12)$$

e, consequentemente,

$$\sigma(0) = 1 - \frac{\lambda}{c} \mu. \quad (1.13)$$

Notamos que se o prémio c for calculado segundo o princípio do valor esperado e considerando uma carga ρ , teremos $c = (1 + \rho) \lambda \mu$, pelo que,

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \rho}, \quad (1.14)$$

ou seja, a probabilidade de ruína eventual, partindo de uma reserva inicial nula, apenas depende da carga de segurança.

Se considerarmos agora a perda agregada máxima e os seus sucessivos incrementos, os quais, como referimos na secção anterior, são *v.a. iid* com distribuição comum $H(\cdot)$, é válido o seguinte teorema:

Teorema 1.5 *A função de distribuição de um incremento vem dada pela expressão*

$$H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy. \quad (1.15)$$

Prova-se ainda o seguinte teorema:

Teorema 1.6 *A probabilidade de sobrevivência $\sigma(u)$ pode ser calculada como a função de distribuição de uma geométrica composta,*

$$\sigma(u) = \sigma(0) \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(0)]^k H^{k*}(u), \quad u \geq 0, \quad (1.16)$$

expressão na qual $H^{k}(\cdot)$ representa a distribuição da soma de quaisquer k incrementos sucessivos e onde se considera $H^{0*}(u) = 1$.*

Estes teoremas, cuja demonstração pode ser vista em (Centeno 2001), permitem também determinar com relativa simplicidade a transformada de Fourier de $\sigma'(u)$, através da qual, por inversão algébrica ou numérica, se pode obter a probabilidade de sobrevivência ou a probabilidade de ruína eventual. Apresentaremos um exemplo de aplicação prática destas fórmulas no capítulo 5.

1.3.2 A gravidade de ruína

Designa-se por gravidade de ruína o *deficit* no instante de ruína, ou seja, o valor absoluto de $U(t_0)$ quando a ruína ocorre em t_0 . Sejam $G_r(u, x)$ e $g_r(u, x) = D_x[G_r(u, x)]$ as funções de distribuição e densidade (impróprias) da gravidade de ruína, partindo de uma reserva inicial $U(0) = u$, ou seja,

$$G_r(u, x) = P[T < \infty \text{ e } U(T) > -x \mid U(0) = u]. \quad (1.17)$$

Estamos agora em condições de enunciar o seguinte teorema

Teorema 1.7

$$G_r(0, x) = \frac{\lambda}{c} \int_0^x [1 - F(y)] dy, \quad (1.18)$$

e

$$G_r(u, x) = \int_0^u g_r(0, y) G_r(u - y, x) dy + \int_u^{u+x} g_r(0, y) dy. \quad (1.19)$$

Pode também demonstrar-se para a densidade da gravidade de ruína o seguinte teorema:

Teorema 1.8

$$g_r(u, x) = \frac{1}{\sigma(0)} \left[\frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x + y) \psi(u - y) dy + g_r(0, u + x) - \psi(u) g_r(0, x) \right]. \quad (1.20)$$

1.3.3 Ruína em tempo contínuo e horizonte finito

A probabilidade de ruína em tempo finito apresenta-se em geral mais difícil de tratar, sendo apenas até à data conhecida, para este modelo, uma expressão algébrica geral para a sua determinação. Esta expressão foi apresentada ao mundo actuarial por Seal (1978), daí advindo o nome pelo qual é conhecida neste meio - equação de Seal.

Teorema 1.9 *Representando por $F(t, x)$ a função de distribuição das indemnizações agregadas relativas ao intervalo $(0, t)$, verificam-se as seguintes igualdades:*

$$\sigma(0, t) = \frac{1}{ct} \int_0^{ct} F(t, x) dx, \quad (1.21)$$

$$\sigma(u, t) = F(t, u + ct) - c \int_0^t \sigma(0, t - \tau) dF(\tau, u + c\tau). \quad (1.22)$$

As expressões anteriores permitem, como veremos através de diversos exemplos nos capítulos 5 e 6, o cálculo numérico de probabilidades de ruína com elevada aproximação, para a maioria das distribuições conhecidas. Veremos ainda que, pelo menos quando a distribuição individual de sinistros é exponencial, combinação de exponenciais ou Erlang, é possível determinar expressões exactas para a probabilidade de sobrevivência, através da transformada dupla de Laplace da densidade do tempo de ruína, obtida por (Gerber & Shiu 1998). Para o efeito, procederemos no capítulo 5 à inversão algébrica desta transformada, a qual, por ser implícita, levanta algumas questões de mais complexa resolução.

Capítulo 2

O modelo de renovamento

2.1 Introdução

Neste capítulo efectuamos uma descrição sucinta do modelo de risco conhecido por modelo de renovamento, do qual o modelo clássico é, como veremos, um caso particular. Tal como este, o modelo de renovamento encontra-se também abundantemente tratado na literatura actuarial, bem como a sua aplicação na teoria da ruína, embora tenhamos perfeita noção que o seu desenvolvimento e aplicação concretos apresentam dificuldades acrescidas, algumas das quais só recentemente têm sido parcialmente vencidas. Devemos salientar de novo que os resultados e proposições apresentados neste capítulo estão longe de abordar e abranger o universo existente, pretendendo somente contribuir para um melhor enquadramento de alguns resultados da presente tese.

Na secção 2.2 apresentamos as principais características do modelo, assim como a descrição dos processos estocásticos que o suportam. Procede-se ainda ao alargamento a este modelo da definição de *coeficiente de ajustamento* dada no capítulo anterior.

A secção 2.3 é dedicada aos principais resultados conhecidos da teoria da ruína para o presente modelo.

2.2 Descrição do modelo

O modelo de renovamento pode ser definido de uma forma idêntica ao modelo clássico, considerando todavia que o processo estocástico de contagem do número de sinistros, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, é um processo de renovamento, do qual o processo de Poisson é um caso particular.

Designa-se por T_1 o tempo que decorre desde a origem até à ocorrência do primeiro sinistro e por T_k , $k \geq 2$, o tempo que decorre entre o sinistro $(k-1)$ e o sinistro k .

Se $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$ constituir uma sequência de variáveis aleatórias *iid*, o processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é designado por processo de renovamento **ordinário**. Se T_1 tiver uma distribuição diferente da distribuição comum de T_k , $k \geq 2$, embora mantendo-se a independência entre todos os tempos inter-ocorrências, teremos um processo de renovamento modificado ou **adiado**. Doravante, excepto quando explicitado em contrário, consideraremos que estamos perante um processo de renovamento ordinário.

Designa-se então por $G(t)$ e $g(t)$, respectivamente, as funções distribuição e densidade do tempo T que decorre entre dois quaisquer sinistros consecutivos. Torna-se fácil verificar que

o número k de sinistros que ocorre no intervalo $(0, t]$ tem função de probabilidade $p_k(t)$ dada pela expressão

$$p_k(t) = G^{k*}(t) - G^{(k+1)*}(t), \quad k \geq 0, \quad (2.1)$$

expressão na qual $G^{k*}(t)$ representa a convolução de ordem k de $G(\cdot)$, ou seja é a função de distribuição correspondente à soma de k variáveis aleatórias *iid.* a T . Por definição, teremos $G^{1*}(t) = G(t)$ e $G^{0*}(t) = 1$.

Com efeito, o acontecimento “ocorrerem k sinistros no intervalo $(0, t]$ ” pode exprimir-se pela diferença entre os acontecimentos “ocorrerem pelo menos k sinistros no intervalo $(0, t]$ ” e “ocorrerem pelo menos $k + 1$ sinistros no intervalo $(0, t]$ ”, cujas probabilidades vêm dadas respectivamente, pelas igualdades

$$P\left(\sum_{i=1}^k T_i \leq t\right) = G^{k*}(t), \quad \text{para } k \geq 1,$$

e

$$P\left(\sum_{i=1}^{k+1} T_i \leq t\right) = G^{(k+1)*}(t),$$

as quais justificam a expressão (2.1).

Torna-se evidente que, se a distribuição de T é exponencial, o número de sinistros por unidade de tempo tem distribuição de Poisson, pelo que o modelo clássico, tal como afirmámos, é um caso particular do modelo de renascimento ordinário.

Tal como no modelo clássico, a reserva no instante t vem dada pela expressão

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

na qual as variáveis e constantes utilizadas têm exactamente o mesmo significado daquele que lhe foi atribuído no capítulo anterior. Estamos assim em presença de um processo estocástico $\{U(t)\}_{t \geq 0}$, o qual representa o capital (ou reserva) no instante t , sendo também o montante agregado das indemnizações representado pelo processo estocástico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, o qual apenas difere do modelo anterior pelo facto do processo de contagem $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, ser um processo de renascimento.

As hipóteses-base para o presente modelo são em tudo idênticas às descritas para o modelo clássico, com λ a representar neste caso o inverso do valor esperado de T .

Nalgumas partes do texto suporemos ainda que existe o coeficiente de ajustamento R , o qual é definido para este modelo como a única raiz positiva da equação

$$E(e^{-crT}) m(r) = 1. \quad (2.3)$$

Devemos notar que, no caso de T possuir distribuição exponencial (estaremos assim perante o modelo clássico), a definição anterior é equivalente à daquele modelo.

Considerando a extensão da expressão algébrica da função geradora de momentos ao intervalo $(-\infty, \infty)$, a equação (2.3) pode ter outras raízes positivas, sendo também neste modelo, o coeficiente de ajustamento, a primeira raiz à direita da origem.

Exemplo 2.1 *Se o tempo inter-sinistros e as indemnizações individuais tiverem distribuição comum $\Gamma(2, 2)$ e considerando $c = 1.5$, a equação anterior pode escrever-se na forma*

$$\left(\frac{2}{2 + 1.5r}\right)^2 = \left(\frac{2 - r}{2}\right)^2.$$

A representação gráfica dos dois lados da igualdade anterior terá então a forma da figura 3,

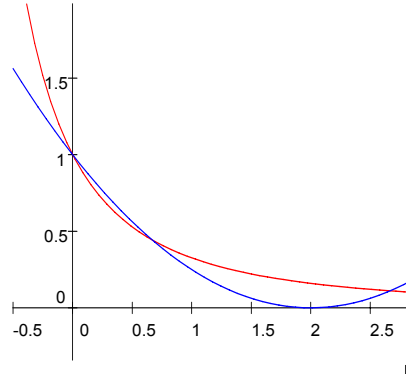


Figura 3

na qual se notam claramente as raízes $\{r = 0\}$, $\{r = 2/3\}$ e $\{r = 2 + 2/3\}$. A última raiz está naturalmente fora do intervalo $(-\infty, 2)$ de existência da função geradora de momentos de X_k . Neste caso o coeficiente de ajustamento tem o valor $2/3$.

Devemos salientar ainda que a relação (2.2), imediatamente após o pagamento da n -ésima indemnização, se pode escrever na forma

$$U(t) = u + \sum_{k=1}^n (cT_k - X_k), \quad (2.4)$$

pelo que a probabilidade de ruína eventual se pode definir neste caso por

$$\psi(u) = P \left\{ u + \sum_{k=1}^n (cT_k - X_k) < 0, \text{ para algum } n \in N^+ \right\}. \quad (2.5)$$

Sob as hipóteses anteriormente admitidas, tal como para o modelo clássico, verifica-se que, caso não haja interrupção no processo ao longo do tempo, $U(t) \rightarrow \infty$ com t , sendo válidas também para este modelo as restantes considerações efectuadas para aquele, referentes à existência e ao instante de ruína, bem como à duração de eventuais reservas negativas.

2.3 Principais resultados da teoria da ruína no modelo de renovamento

2.3.1 Ruína em tempo contínuo e horizonte infinito

Modelo de renovamento ordinário

Teorema 2.1 *Desigualdade de Lundberg - Se existe o coeficiente de ajustamento, é válida a seguinte desigualdade:*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (2.6)$$

Esta desigualdade foi pela primeira vez provada por (Sparre Andersen 1957).

Teorema 2.2 *Para distribuições de sinistros do tipo exponencial e tempos inter-sinistros mistura de duas distribuições exponenciais, é válida a relação*

$$\psi(u) = (1 - \mu R) e^{-Ru} = \psi(0) e^{-Ru}. \quad (2.7)$$

Ver Grandell (1991), pag. 61-66.

Todavia, Reis (Egídio dos Reis 1999) demonstra que o resultado anterior é mais geral. A relação 2.7 mantém-se sempre que a distribuição das indemnizações é exponencial, independentemente da distribuição dos tempos inter-sinistros.

Teorema 2.3 *Para $u \geq 0$, a probabilidade de não ruína vem dada pela expressão:*

$$\sigma(u) = \int_0^\infty g(t) \int_0^{u+ct} f(x) \sigma(u+ct-x) dx dt. \quad (2.8)$$

Condicionando pelo instante t e pelo montante x do primeiro sinistro e aplicando o teorema das probabilidades totais, a demonstração torna-se imediata.

A relação (2.8) permite determinar a transformada de Laplace de $\sigma(u)$, pelo menos para as distribuições mais vulgares do tempo inter-sinistros, a partir da qual, por inversão, é possível encontrar uma expressão algébrica para aquela probabilidade.

Modelo de renovamento estacionário Considere-se agora que $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de renovamento no qual o tempo T_1 até à ocorrência do primeiro sinistro tem uma distribuição diferente dos restantes tempos inter-ocorrências e que estes têm valor esperado $1/\alpha$. Estamos assim perante um processo de renovamento adiado. Prova-se que para um processo de renovamento adiado ser estacionário, a distribuição de T_1 terá de ter densidade

$$g_1(t) = \alpha [1 - G(t)], \quad (2.9)$$

expressão na qual $G(t)$ é a função de distribuição comum dos restantes intervalos de tempo inter-sinistros, cujo valor médio é $1/\alpha$.

Prova-se (ver Grandell 1991) que, neste caso, são válidas as seguintes relações:

$$\psi(0) = \frac{1}{1 + \rho}, \quad (2.10)$$

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \frac{\alpha}{c} \int_0^u \sigma_o(u-x) [1 - F(x)] dx, \quad (2.11)$$

e

$$\psi(u) = \frac{\alpha}{c} \left\{ \int_u^\infty [1 - F(x)] dx + \int_0^u \psi_o(u-x) [1 - F(x)] dx \right\}, \quad (2.12)$$

expressões nas quais $\sigma_o(\cdot)$ e $\psi_o(\cdot)$ são, respectivamente, as probabilidades de não ruína e ruína eventual no modelo de renovamento ordinário anteriormente descrito.

2.3.2 Ruína em tempo contínuo e horizonte finito

Se no modelo clássico de risco já não era simples determinar a probabilidade de ruína, ou a probabilidade de sobrevivência, em horizonte finito, no modelo de renovamento ordinário a questão complica-se, até porque, a fórmula de Seal, expressão (1.22), só é válida quando o processo número de sinistros é estacionário e de incrementos independentes, o que neste caso não se verifica. Contudo, segundo Eade (1983), a utilização daquela equação conduz para algumas distribuições a resultados bastante aproximados.

Todavia, (Dickson & Hipp 2001), partindo da transformada de Laplace correspondente ao tempo de ruína,

$$\phi(u) = E \left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u \right],$$

função que retomaremos com mais detalhe no capítulo 5, e de uma distribuição do tempo inter-sinistros $\Gamma(2, \beta)$, demonstram a seguinte equação integro-diferencial:

$$c^2 \frac{d^2}{du^2} \phi(u) - 2(\beta + \delta) c \frac{d}{du} \phi(u) + (\beta + \delta)^2 \phi(u) = \beta^2 \int_0^u \phi(u-x) f(x) dx + \beta^2 [1 - F(u)], \quad (2.13)$$

a partir da qual aqueles autores calculam o valor esperado e outros momentos da distribuição do tempo de ruína.

Capítulo 3

As transformadas de Laplace e Fourier

3.1 Introdução

Este capítulo tem por principal objectivo definir as transformadas de Laplace e de Fourier, bem como enunciar as suas principais propriedades, a maioria das quais será utilizada nas aplicações concretas à teoria do risco e em particular à teoria da ruína. Com excepção da secção 3.9, na qual serão efectuadas algumas extensões à transformada do coseno, as demonstrações serão omitidas, tanto mais que as mesmas podem ser verificadas em diversas obras de análise complexa e, em particular, nas referências apresentadas (ver (Marsden & Hoffman 1999) ou Poularikas 1996).

O presente capítulo pressupõe que o leitor tem um conhecimento básico de análise complexa, bem como das principais propriedades das funções que são utilizadas no campo complexo, muito especialmente as designadas *funções analíticas*. O conceito e as principais propriedades destas funções, assim como a natureza e classificação dos *pontos singulares*, encontram-se resumidamente descritas no Anexo I.

Na secção 3.1 procedemos à definição da *transformada de Laplace* no campo complexo, da qual, a definição corrente no campo real, é um caso particular. Abordamos também a definição de *abscissa de convergência* e enuncia-se um importante teorema que permite determinar a sua localização.

Na secção 3.2 são enunciadas as principais propriedades das transformadas de Laplace.

A Secção 3.3 é dedicada à fórmula de inversão complexa de uma transformada de Laplace, a qual constitui uma das principais ferramentas de trabalho da presente tese.

Na secção 3.4 procedemos à definição da *transformada de Fourier*.

Na secção 3.5 são enunciadas as principais propriedades das transformadas de Fourier.

A Secção 3.6 é dedicada à fórmula de inversão complexa de uma transformada de Fourier, a qual constitui também uma ferramenta de trabalho frequentemente utilizada na presente tese.

Na secção 3.7 procedemos à definição da *transformada de Fourier do coseno e do seno*.

Na secção 3.8 são enunciadas as principais propriedades das transformadas de Fourier do coseno.

Na secção 3.9 introduzimos a noção de *transformada do coseno modificada*, bem como a sua aplicação a vectores aleatórios. No final da mesma, procedemos a um refinamento das fórmulas de inversão das transformadas de Laplace e Fourier através da transformada do coseno, o qual

se mostrou particularmente vantajoso nalguns dos exemplos práticos apresentados.

3.2 Definição da transformada de Laplace

Consideremos uma função $f(\cdot)$, de valor real ou complexo, definida em $[0, \infty)$. A transformada de Laplace de $f(\cdot)$ é, por definição, uma função $\tilde{f}(z)$, com z variável complexa, dada por

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (3.1)$$

A transformada considera-se definida apenas para os valores de $z \in \mathbb{C}$, para os quais o integral converge. Outra notação possível para \tilde{f} é $\mathcal{L}(f)$. Em geral, impõe-se a restrição a f no sentido de que seja uma função de ordem exponencial, isto é, que existam constantes $A > 0$ e $B \in \mathbb{R}$, tais que

$$|f(t)| \leq Ae^{Bt} \quad (3.2)$$

para todo o $t \geq 0$. Note-se que na maior parte das funções que aparecem na teoria do risco, esta restrição é em geral respeitada, uma vez que a maioria dessas funções são distribuições de probabilidade ou funções com elas relacionadas. Assume-se ainda que, em qualquer intervalo finito, f é limitada e integrável à Riemann.

O teorema seguinte tem bastante importância para determinadas aplicações desta transformada.

Teorema 3.1 - Abcissa de convergência - Se $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função de ordem exponencial e se considerarmos o integral

$$\tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt,$$

então existe um único número $\sigma \in [-\infty, \infty)$, para o qual o integral converge para todos os valores de z tais que $\text{Re}(z) > \sigma$ e diverge se $\text{Re}(z) < \sigma$. Para além disso, \tilde{f} é analítica no semi-plano $\{z \mid \text{Re}(z) > \sigma\}$ e neste semi-plano, designado por semi-plano de convergência, verifica-se a relação

$$\frac{d}{dz} \tilde{f}(z) = - \int_0^{\infty} te^{-zt} f(t) dt. \quad (3.3)$$

A σ chama-se abcissa de convergência. Considerando que a função é de ordem exponencial e verificando-se consequentemente a desigualdade (3.2), tem-se sempre $\sigma \leq B$. A questão de saber se o integral converge ou não para valores de z situados na recta $\text{Re}(z) = \sigma$, é mais delicada e terá de ser vista com muita atenção para cada caso particular considerado. Como se verificará nalguns exemplos concretos aplicados à teoria da ruína, o integral diverge naquela recta.

3.3 Propriedades fundamentais da transformada de Laplace

Propriedade 1 - “Unicidade” A transformada de Laplace de uma dada função, se existir, é única.

Propriedade 2 - “Unicidade” inversa Se $f(t)$ e $g(t)$ forem funções contínuas e possuírem transformadas que coincidam no semi-plano $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > z_0\}$, então $f(t) = g(t)$ para todo o $t \in [0, \infty)$.

A propriedade anterior permite-nos concluir que a transformada inversa de uma dada função definida em \mathbb{C} , se existir, é única.

Propriedade 3 - Linearidade No semi-plano à direita da maior das abcissas de convergência de $f(t)$ e $g(t)$, é válida a relação

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\tilde{f} + b\tilde{g}. \quad (3.4)$$

Propriedade 4 - Derivada Se $f(t)$ é contínua no intervalo $[0, \infty)$ e derivável neste intervalo, com possível excepção num conjunto de medida nula, então, para $\operatorname{Re}(z) > \sigma$, é válida a relação

$$\widetilde{f'(\cdot)}(z) = z\tilde{f}(z) - f(0). \quad (3.5)$$

Propriedade 5 - Integral Considere-se $g(t) = \int_0^t f(x)dx$. Ter-se-á então, para $\operatorname{Re}(z) > \max[0, \sigma]$,

$$\tilde{g}(z) = \frac{\tilde{f}(z)}{z}. \quad (3.6)$$

Notando que $g'(t) = f(t)$ e que $g(0) = 0$, esta propriedade é consequência imediata da propriedade 4.

Propriedade 6 - Translação da transformada Fixado a , real ou complexo, é válida a relação

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \tilde{f}(z + a), \quad (3.7)$$

para todos os valores de z pertencentes ao semi-plano $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > \sigma - \operatorname{Re}(a)\}$.

Propriedade 7 - Translação da função original Para a real e positivo, a função $g(t) = f(t - a)$, para $t \geq a$, tem por transformada

$$\tilde{g}(z) = e^{-az}\tilde{f}(z) \quad (3.8)$$

a qual é válida no semi-plano $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > \sigma\}$.

Propriedade 8 - Transformada de uma convolução A convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ é definida para $t \geq 0$ pela relação

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (3.9)$$

a qual se pode escrever na forma

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad (3.10)$$

desde que se considere que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Esta propriedade diz-nos que a transformada de uma convolução de duas funções é igual ao produto das respectivas transformadas, ou seja,

$$\widetilde{(f * g)}(z) = \tilde{f}(z)\tilde{g}(z), \quad (3.11)$$

relação que é válida para $\text{Re}(z) > \max(\sigma_f, \sigma_g)$.

3.4 A transformada inversa de Laplace

Para que uma transformada, em geral obtida através de operações algébricas e por recurso às propriedades enunciadas no parágrafo anterior, se torne verdadeiramente útil, torna-se necessário determinar a função original, seja através da sua expressão algébrica, seja por cálculo numérico em pontos previamente definidos. Para esse efeito, ou se transforma algebricamente a própria transformada numa combinação linear de transformadas de funções conhecidas, cuja inversão se torna então óbvia, ou se recorre à fórmula de inversão complexa, a qual constitui muitas vezes o único meio de obter uma expressão algébrica para aquela função. Essa inversão tem por base o teorema que segue (ver Marsden 1999).

Teorema 3.2 *Supondo que $\tilde{f}(z)$ tem um número finito N de pontos singulares, que é uma função analítica no semi-plano $\{z \mid \text{Re}(z) > \sigma\}$ e que é possível encontrar constantes positivas M, R e β tais que para $|z| \geq R$ se verifica a desigualdade $|\tilde{f}(z)| \leq M/|z|^\beta$, então, caso exista, a transformada inversa virá dada pela expressão*

$$f(t) = \sum_{k=1}^N r(z_k), \quad (3.12)$$

onde $r(z_k)$ representa o resíduo no ponto singular z_k da função $e^{zt}\tilde{f}(z)$ em $\mathbb{C} \setminus \{z \mid \text{Re}(z) > \sigma\}$.

Notamos que o resíduo num ponto singular z_k é o coeficiente de z^{-1} no desenvolvimento de uma função em série de Laurent em potências de $(z - z_k)$ (ver Anexo I).

Deve ainda assinalar-se que, caso $\tilde{f}(z)$ seja reconhecidamente uma transformada de uma dada função, ainda que não se conheça a expressão algébrica desta, a inversão é sempre possível e, para aplicação do teorema anterior, não se torna necessário verificar a existência das condições nele referidas.

Corolário 3.2.1 *Sob as condições do teorema anterior, se existe uma singularidade na recta $\text{Re}(z) = \sigma$, então a abcissa de convergência de $f(t)$ é σ e verifica-se a relação*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zt} \tilde{f}(z) dz, \quad (3.13)$$

válida para qualquer constante real $\alpha > \sigma$.

O integral anterior converge como um integral impróprio de Riemann (ver Marsden 1999, pág. 471 - 473).

3.5 Definição da transformada de Fourier

Se $f(x)$ é absolutamente integrável no intervalo $(-\infty, \infty)$, ou seja $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$, então define-se a transformada de Fourier pela relação

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} f(x) dx. \quad (3.14)$$

Como notação alternativa, usar-se-á também $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

Devemos notar as seguintes particularidades:

1. em geral, este tipo de transformada, aplica-se a funções reais de variável real;
2. existem outras definições, como por exemplo o integral em (3.14) vir multiplicado por $1/\sqrt{2\pi}$ ou o sinal do expoente ser positivo. Nestes casos, as propriedades a seguir enunciadas deverão ser ajustadas em conformidade;
3. se $f(x)$ for uma densidade de probabilidade, $\hat{f}(-s)$ designa-se por função característica. Quando na definição da transformada de Fourier se elimina o sinal do expoente, função característica e transformada coincidem.
4. caso $f(x)$ tenha como domínio o intervalo $[0, \infty)$, a transformada de Fourier é um caso particular da transformada de Laplace, considerando $z = is$.

3.6 Propriedades da transformada de Fourier

Nos casos em que a transformada de Fourier é um caso particular da transformada de Laplace, ela goza de todas as propriedades enunciadas no parágrafo anterior, embora possua propriedades específicas que, em geral, a transformada de Laplace não tem. Por essa razão, independentemente da sua natureza, passaremos a enunciar as principais propriedades de que goza esta transformada, as quais poderão ser consultadas em detalhe nas referências acima indicadas.

Propriedade 1 - “Unicidade” A transformada de Fourier de uma dada função, se existir, é única.

Propriedade 2 - “Unicidade” inversa Se $f(t)$ e $g(t)$ forem funções contínuas e possuírem transformadas que coincidam no semi-plano $\{z \mid \operatorname{Re}(z) > z_0\}$, então $f(t) = g(t)$ para todo o $t \in [0, \infty)$.

A propriedade anterior permite-nos concluir que a transformada inversa de uma dada função definida em \mathbb{C} , se existir, é única.

Propriedade 3 - Valor absoluto

$$|\widehat{f}(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx. \quad (3.15)$$

Se, em particular, $f(x)$ for uma função densidade, ter-se-á sempre $|\widehat{f}(s)| < 1$.

Propriedade 4 - Linearidade Se $f(t)$ e $g(t)$ tiverem transformadas \widehat{f} e \widehat{g} , respectivamente, é válida a relação

$$\mathcal{F}(af + bg) = a\widehat{f} + b\widehat{g}. \quad (3.16)$$

Propriedade 5 - Derivada Se $f(t)$ é derivável para todos os valores de t e tende para zero quando t tende para infinito, é válida a relação

$$\widehat{f}'(s) = is\widehat{f}(s). \quad (3.17)$$

Propriedade 6 - Primitivas Se $f(t)$ e $F(t) = \int_{-\infty}^t f(x)dx$ são absolutamente integráveis, ter-se-á

$$\widehat{F}(s) = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(x)dx\right] = -i\frac{\widehat{f}(s)}{s}. \quad (3.18)$$

Notamos que esta propriedade é consequência imediata da propriedade 5.

Se $F(x)$ é uma função real de variável real definida em \mathcal{R}^+ , integrável e com derivada $f(x) = F'(x)$, então, se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= 1, \\ \mathcal{F}[1 - F(x)] &= \frac{-i[1 - F(0)]}{s} + \frac{i}{s}\widehat{f}(s), \end{aligned} \quad (3.19)$$

e se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) &= 0, \\ \mathcal{F}[F(x)] &= i\frac{\widehat{f}(s) + F(0)}{-s}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Propriedade 7 - Translação da transformada Fixado a real, é válida a relação

$$\mathcal{F} [e^{-iat} f(t)] = \widehat{f}(s + a). \quad (3.21)$$

Propriedade 8 - Translação da função original Para qualquer valor de a real, a função $g(t) = f(t - a)$ tem por transformada

$$\widehat{g}(s) = e^{-ias} \widehat{f}(s). \quad (3.22)$$

Propriedade 9 - Transformada de uma convolução A convolução de duas funções $f(x)$ e $g(x)$ tem por transformada o produto das respectivas transformadas, isto é,

$$\mathcal{F} [(f * g)] = \widehat{f}(s) \widehat{g}(s). \quad (3.23)$$

Esta propriedade pode ser estendida às convoluções sucessivas de várias funções. Se $\widehat{f}_1(s), \widehat{f}_2(s), \dots, \widehat{f}_n(s)$, existem e são transformadas das funções referidas pelo índice respectivo, então

$$\mathcal{F} [f_1 * f_2 * \dots * f_n] = \widehat{f}_1(s) \widehat{f}_2(s) \dots \widehat{f}_n(s). \quad (3.24)$$

Em particular, a transformada da convolução de ordem n de uma função $f(x)$, será dada pela expressão

$$\mathcal{F} [f * f * \dots * f] = [\widehat{f}(s)]^n. \quad (3.25)$$

Propriedade 10 - Transformada do produto Se $f(x)$ e $g(x)$ não negativas, têm transformadas $\widehat{f}(s)$ e $\widehat{g}(s)$, respectivamente, então a transformada do produto é dada pela convolução daquelas transformadas, ou seja,

$$\mathcal{F} [f(x)g(x)] = \int_0^s \widehat{f}(s-v) \widehat{g}(v) dv = \widehat{f}(s) * \widehat{g}(s). \quad (3.26)$$

3.7 A inversão da transformada de Fourier

Se $f(x)$ tem transformada $\widehat{f}(s)$, pode-se recuperar algebricamente a função original através da relação

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} [\widehat{f}(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \widehat{f}(s) ds. \quad (3.27)$$

O integral impróprio na expressão anterior pode ser avaliado pelo teorema dos resíduos (ver Anexo I).

3.8 As transformadas de Fourier do cosseno e do seno

Se s é real não negativo e se $f(x)$ é também uma função real, de variável real não negativa, com transformada de Fourier $\widehat{f}(s)$, teremos:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-isx} f(x) dx = \int_0^{\infty} \cos(sx) f(x) dx - i \int_0^{\infty} \sin(sx) f(x) dx \\ &= \widehat{f}_{cs}(s) - i \widehat{f}_{sn}(s),\end{aligned}\quad (3.28)$$

expressão em que:

$$\widehat{f}_{cs}(s) = \int_0^{\infty} \cos(sx) f(x) dx \quad (3.29)$$

e

$$\widehat{f}_{sn}(s) = \int_0^{\infty} \sin(sx) f(x) dx, \quad (3.30)$$

representam a parte real e a parte imaginária da transformada de Fourier original, e que se designam por transformadas (de Fourier) do cosseno e do seno, respectivamente.

Por simplicidade de escrita e sempre que necessário, usar-se-ão também as notações

$$\mathcal{F}_{cs} [g(x)]_s = \widehat{g}_{cs}(s) \text{ e } \mathcal{F}_{sn} [g(x)]_s = \widehat{g}_{sn}(s).$$

3.9 Propriedades da transformada do cosseno

As propriedades básicas da transformada do cosseno são mais restritas que as da transformada de Fourier, todavia, com as extensões que se desenvolverão no parágrafo seguinte, revelam-se de elevado potencial como se verá através de algumas aplicações concretas à teoria das probabilidades e em particular à teoria do risco.

Propriedade 1 - Transformada inversa Aparte uma constante, a transformada inversa tem exactamente a mesma forma da transformada directa, o que se pode verificar pela seguinte fórmula de inversão:

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(sx) \widehat{f}_{cs}(s) ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(sx) \left[\int_0^{\infty} f(\tau) \cos(s\tau) d\tau \right] ds.\end{aligned}\quad (3.31)$$

São condições suficientes para que a expressão anterior seja válida que $f(x)$ seja absolutamente integrável e que $f'(x)$ exista e seja contínua ou contínua por troços numa partição que cubra o intervalo $[0, \infty)$. Nos pontos de continuidade a fórmula (3.31) é exacta, enquanto que, num ponto de descontinuidade x_0 , o valor obtido pela mesma fórmula corresponde à média entre $f(x_0^-)$ e $f(x_0^+)$, ou seja, de uma forma geral, tem-se

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(sx_0) \widehat{f}_{cs}(s) ds = \frac{1}{2} [f(x_0^-) + f(x_0^+)]. \quad (3.32)$$

Nas condições anteriores prova-se com facilidade que, para $f(x)$ contínua, é válida a seguinte fórmula de inversão

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(sx)}{s} \widehat{f_{cs}}(s) ds. \quad (3.33)$$

Devemos notar que se pretendermos calcular a função de distribuição de uma variável aleatória X mista, não negativa e contínua à direita da origem, à expressão anterior será necessário adicionar a probabilidade de $X = 0$.

Propriedade 2 - Transformada de uma derivada Pode verificar-se com facilidade que as transformadas das derivadas de ordem ímpar se podem exprimir na transformada do seno, enquanto que as das derivadas de ordem par se exprimem na transformada do cosseno. Assim, teremos:

$$\begin{aligned} \widehat{f'_{cs}}(s) &= \int_0^\infty \cos(sx) f'(x) dx = -f(0) + s \int_0^\infty \sin(sx) f(x) dx \\ &= -f(0) + s \widehat{f_{sn}}(s); \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \widehat{f''_{cs}}(s) &= \int_0^\infty \cos(sx) f''(x) dx = -f'(0) + s^2 \int_0^\infty \cos(sx) f(x) dx \\ &= -f'(0) - s^2 \widehat{f_{cs}}(s). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Para que (3.34) e (3.35) se verifiquem é suficiente que $f'(x)$ exista e que tanto $f(x)$ como $f'(x)$ sejam contínuas e tendam ambas para zero quando $x \rightarrow \infty$. A extensão a derivadas de ordem superior é evidente e não carece de outras condições especiais, para além da sua existência e continuidade.

Propriedade 3 - Derivada de uma transformada As derivadas das transformadas podem considerar-se como transformadas do produto da função por adequada potência da variável independente. Assim, para derivadas de ordem par é válida a relação

$$\left[\widehat{f_{cs}}(s) \right]^{(2n)} = \mathcal{F}_{cs} \left[(-1)^n x^{2n} f(x) \right]_s, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

e para derivadas de ordem ímpar,

$$\left[\widehat{f_{cs}}(s) \right]^{(2n+1)} = \mathcal{F}_{sn} \left[(-1)^{n+1} x^{2n+1} f(x) \right]_s, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.37)$$

Para a validade das expressões anteriores exige-se que os respectivos integrais existam e sejam finitos, o que acontece se $f(x)$ for uma função de ordem exponencial, uma vez que uma exponencial decresce (cresce) mais rapidamente que qualquer potência do respectivo expoente.

Propriedade 4 - Transformada de um integral Tal como acontece na derivação, as transformadas de integrais, exprimem-se em transformadas do seno, ou seja,

$$\mathcal{F}_{cs} \left[\int_x^\infty f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \widehat{f_{sn}}(s) \quad (3.38)$$

A fórmula anterior será válida sempre que os integrais envolvidos existam e sejam finitos, ou seja, exige-se que $f(x)$ seja absolutamente integrável em qualquer sub-intervalo de $[0, \infty)$.

3.10 Algumas extensões à transformada do coseno

3.10.1 A transformada do coseno modificada

Teorema 3.3 *Considerem-se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ contínuas, não negativas e definidas em \mathcal{R}^+ . Considere-se ainda que $g(x)$ é estritamente crescente ou estritamente decrescente e que $f(x)$ é absolutamente integrável em qualquer sub-intervalo de $[0, \infty)$. Seja $\varphi(u)$, com $u \in \mathcal{R}^+$, definida por*

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \cos[ug(y)] f(y) dy, \quad (3.39)$$

então, se $g(x)$ é estritamente crescente tem-se

$$F(x) = \int_0^x f(y) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[ug(x)]}{u} \varphi(u) du, \quad (3.40)$$

e se $g(x)$ é estritamente decrescente,

$$\int_x^\infty f(y) dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[ug(x)]}{u} \varphi(u) du. \quad (3.41)$$

Demonstração Em primeiro lugar, pode-se verificar que $\varphi(u)$ é finita e contínua para qualquer valor real de u em \mathcal{R}^+ . Considere-se x real e positivo e a função

$$S(U, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^U \frac{\sin[ug(x)]}{u} \varphi(u) du.$$

Substituindo nesta expressão $\varphi(u)$ pela igualdade (3.39) que a define, obtemos

$$S(U, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^U \frac{\sin[ug(x)]}{u} \int_0^\infty \cos[ug(y)] f(y) dy du. \quad (3.42)$$

Considerando a natureza das funções integrandas podemos inverter a ordem de integração, obtendo

$$S(U, x) = \int_0^\infty f(y) \int_0^U \frac{2 \sin[ug(x)] \cos[ug(y)]}{\pi u} du dy. \quad (3.43)$$

Considerando que $2 \sin[ug(x)] \cos[ug(y)] = \sin\{u[g(x) + g(y)]\} - \sin\{u[g(y) - g(x)]\}$, a relação (3.43) pode escrever-se na forma

$$S(U, x) = \int_0^\infty f(y) \left\{ \int_0^U \frac{\sin\{u[g(x) + g(y)]\}}{\pi u} du - \int_0^U \frac{\sin\{u[g(y) - g(x)]\}}{\pi u} du \right\} dy. \quad (3.44)$$

Se considerarmos agora os dois integrais internos da expressão anterior e os respectivos limites quando $U \rightarrow \infty$ teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin\{u[g(x) + g(y)]\}}{\pi u} du &= \frac{1}{2} \text{ e} \\ \int_0^U \frac{\sin\{u[g(y) - g(x)]\}}{\pi u} du &= -\frac{1}{2} \text{ se } g(x) > g(y) \\ &= \frac{1}{2} \text{ se } g(x) < g(y). \end{aligned}$$

Assim, se $g(x)$ é estritamente crescente a diferença dos dois integrais internos em (3.44) é zero, se $y > x$ e um, se $y < x$, pelo que neste caso, $\lim_{U \rightarrow \infty} S(U, x) = \int_0^x f(y) dy$ e a primeira afirmação do teorema considera-se demonstrada. No caso de $g(x)$ ser estritamente decrescente a diferença dos dois integrais é zero, se $y < x$ e um, se $y > x$, pelo que neste caso, $\lim_{U \rightarrow \infty} S(U, x) = \int_x^\infty f(y) dy$ e o teorema considera-se demonstrado. \square

Notamos que, se $g(x) = x$, $\varphi(u)$ é a transformada do cosseno da função $f(\cdot)$ e a expressão (3.40) é em tudo idêntica à fórmula (3.33).

Corolário 3.3.1 *Considere-se uma variável aleatória X , não negativa e contínua, com função de distribuição $F(x)$ e função característica $\varphi(u) = \varphi_r(u) + i\varphi_m(u)$, em que $\varphi_r(u)$, a parte real de $\varphi(u)$, representa a transformada do cosseno de $F'(x)$. Se $Y = g(X)$ é uma função estritamente crescente de X , verifica-se a relação*

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[ug^{-1}(y)]}{u} \varphi_r(u) du. \quad (3.45)$$

Demonstração A demonstração é imediata, aplicando (3.40) ou (3.33) e notando que $F_Y(y) = P[X \leq g^{-1}(y)]$. \square

No caso de $g(\cdot)$ ser estritamente decrescente, pode-se verificar, pelo teorema anterior, que a expressão do lado direito de (3.45) daria $1 - F_Y(y)$.

3.10.2 Uma generalização a vectores aleatórios

Teorema 3.4 *Considere-se um vector aleatório $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ com função de distribuição $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se $Y = g(X)$ é uma variável aleatória não negativa, então*

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(uy)}{u} \varphi(u) du, \quad (3.46)$$

onde

$$\varphi(u) = \int \dots \int \cos[ug(x_1, x_2, \dots, x_n)] dF(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.47)$$

Demonstração Em primeiro lugar, pode-se verificar que $\varphi(u)$ é finita e contínua para qualquer valor real de u em \mathcal{R}^+ . Considere-se x real e positivo e a função

$$S(U, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^U \frac{\sin(ux)}{u} \varphi(u) du. \quad (3.48)$$

Substituindo nesta igualdade a função $\varphi(u)$ pela sua expressão retirada de (3.47), teremos,

$$S(U, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^U \frac{\sin(ux)}{u} \int \dots \int \cos[ug(x_1, x_2, \dots, x_n)] dF(x_1, x_2, \dots, x_n) du. \quad (3.49)$$

Considerando a natureza das funções integrandas, podemos inverter a ordem de integração, obtendo

$$S(U, x) = \int \dots \int \int_0^U \frac{2 \sin(ux) \cos[ug(x_1, x_2, \dots, x_n)]}{\pi u} du dF(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (3.50)$$

Considerando porém que

$$2 \sin (ux) \cos (uy) = \sin [u(y+x)] - \sin [u(y-x)], \quad (3.51)$$

podemos escrever $S(U, x)$ na forma

$$\int \dots \int \left\{ \int_0^U \frac{1}{\pi} \frac{\sin [u(x + g(x_1, \dots, x_n))]}{u} du - \int_0^U \frac{1}{\pi} \frac{\sin [u(-x + g(x_1, \dots, x_n))]}{u} du \right\} dF(x_1, \dots, x_n). \quad (3.52)$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{U \rightarrow \infty} \int_0^U \frac{1}{\pi} \frac{\sin [u(x + g(x_1, \dots, x_n))]}{u} du &= \frac{1}{2} e \\ \lim_{U \rightarrow \infty} \int_0^U \frac{1}{\pi} \frac{\sin [u(-x + g(x_1, \dots, x_n))]}{u} du &= \frac{1}{2} \text{ se } g(x_1, \dots, x_n) > x \\ &= -\frac{1}{2} \text{ se } g(x_1, \dots, x_n) < x, \end{aligned}$$

verifica-se com facilidade que a diferença entre os integrais internos na expressão (3.52) é nula, se $g(x_1, \dots, x_n) > x$ e é de uma unidade caso contrário, pelo que,

$$\lim_{U \rightarrow \infty} S(U, x) = \int \dots \int_{g(x_1, \dots, x_n) < x} dF(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

expressão que demonstra o teorema. □

3.10.3 A inversão das transformadas de Fourier e Laplace pela transformada do coseno

Se $f(x)$ é uma função real, não negativa e absolutamente integrável em qualquer sub-intervalo de $[0, \infty)$, com transformadas de Laplace e Fourier $\tilde{f}(s)$ e $\widehat{f}(s)$, respectivamente, são válidas as seguintes fórmulas de inversão

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(sx) \widehat{f_{re}}(s) ds. \quad (3.53)$$

Esta expressão (ver 3.31), não é mais que a resultante da inversão da transformada do coseno, a qual, por sua vez, se pode obter determinando a parte real $\widehat{f_{re}}(\cdot)$ da transformada de Fourier, através de simples operações algébricas. Da expressão anterior pode também deduzir-se que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então é válida a relação

$$F(x) = F(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(sx)}{s} \widehat{f_{re}}(s) ds. \quad (3.54)$$

Alguns exemplos deste tipo de transformação serão dados no cálculo de probabilidades de ruína. Por sua vez, para a transformada de Laplace, poder-se-á utilizar a fórmula

$$f(x) = \frac{2}{\pi} e^{bx} \int_0^\infty \cos(sx) \omega(s) ds, \quad (3.55)$$

expressão na qual

$$\omega(s) = \operatorname{Re} \left[\tilde{f}(b - is) \right]. \quad (3.56)$$

A constante b pode em geral ser 1, mas pode ter de ser superior, nomeadamente se \tilde{f} possuir singularidades sobre a recta real. A fórmula de inversão (3.55) pode ver-se em (Seal 1978), tendo sido utilizada com êxito por aquele autor.

Como, porém, a integração algébrica em (3.53) ou em (3.55) é muitas vezes difícil, quando não impossível, há que recorrer ao cálculo numérico dos valores que se pretendem obter, o que levanta dois problemas:

1) É necessário um programa de computador suficientemente elástico e potente para poder efectuar com precisão os cálculos necessários, num intervalo cujo limite superior V tem de ser elevado;

2) Como a função integranda, por conter uma função circular e à medida que o limite superior de integração V aumenta, oscila entre valores positivos e negativos, com uma frequência que depende fortemente do valor de x e que se estabiliza muito lentamente, é extremamente difícil encontrar um valor limite para V que garanta a precisão inicialmente desejada. Por outro lado, um valor de V elevado, provoca uma acumulação de erros assinalável, para além de, na maioria dos algoritmos de cálculo conhecidos, consumir demasiado tempo, mesmo em computadores potentes.

Para o primeiro problema, encontrámos solução através do integral dicotómico, o qual descrevemos no Anexo II. Para o segundo problema, utilizámos com êxito assinalável, como se verá através de exemplos concretos na teoria da ruína, o seguinte teorema:

Teorema 3.5 *Se existe o integral $\int_0^\infty \cos(x)g(x)dx$, são válidas as seguintes igualdades:*

$$\int_0^\infty \cos(x)g(x)dx = \int_0^{2\pi} \left[\cos(x) \sum_{k=0}^\infty g(x + 2k\pi) \right] dx, \quad (3.57)$$

e

$$\int_0^\infty \cos(x)g(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)h(x)dx, \quad (3.58)$$

em que

$$h(x) = \sum_{k=0}^\infty \{g(2k\pi + x) + g[(2k+2)\pi - x] - g[(2k+1)\pi - x] - g[(2k+1)\pi + x]\} \quad (3.59)$$

Demonstração A demonstração da primeira igualdade do teorema é imediata. Com efeito, basta proceder ao cálculo do integral em intervalos sucessivos de amplitude 2π e verificar que $\cos(x)$ é uma função periódica de período 2π , a qual pode ser posta em evidência na soma dos integrais assim obtidos. Para a segunda igualdade basta verificar que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(x)g(x)dx &= \int_0^{\pi/2} \cos(x)g(x)dx + \int_{\pi/2}^\pi \cos(x)g(x)dx \\ &\quad + \int_\pi^{3\pi/2} \cos(x)g(x)dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x)g(x)dx. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Como se pode verificar por simples mudanças de variável,

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x)g(x)dx &= -\int_0^{\pi/2} \cos(x)g(\pi-x)dx \\ \int_{\pi}^{3\pi/2} \cos(x)g(x)dx &= -\int_0^{\pi/2} \cos(x)g(\pi+x)dx \\ \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos(x)g(x)dx &= +\int_0^{\pi/2} \cos(x)g(2\pi-x)dx.\end{aligned}$$

Substituindo as expressões anteriores em (3.60), ficamos com a primeira parcela ($k=0$) do produto $\cos(x)h(x)$. Considerando agora as restantes parcelas, torna-se fácil verificar que elas correspondem aos integrais sucessivos em múltiplos de 2π , o que demonstra a igualdade. \square

Como as séries que aparecem no segundo membro das igualdades (3.57) e (3.59) são uniformemente convergentes e em numerosos casos alternadas, é simples controlar as somas de ordem n , verificando quando as mesmas estabilizam a menos do erro desejado. A utilização deste teorema aumenta a precisão e diminui o tempo de cálculo de forma significativa.

No caso de se pretender calcular o integral $\int_0^{\infty} \cos(sx)g(s)ds$, basta efectuar a mudança de variável $sx = y$ para obter a expressão

$$\int_0^{\infty} \cos(sx)g(s)ds = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} \cos(y)g\left(\frac{y}{x}\right)dy, \quad (3.61)$$

daí resultando um integral ao qual se podem aplicar as fórmulas anteriores.

Quando a função integranda envolve $\sin(x)$, podemos deduzir expressões análogas a (3.57). Com efeito, verifica-se de imediato que,

$$\int_0^{\infty} \sin(x)g(x)dx = \int_0^{2\pi} \left[\sin(x) \sum_{k=0}^{\infty} g(x+2k\pi) \right] dx. \quad (3.62)$$

Capítulo 4

Aplicação das transformadas nas distribuições agregadas

4.1 Introdução

Como anteriormente mencionamos, as aplicações de transformadas na teoria do risco e, em particular, na teoria da ruína, remontam aos primórdios destas teorias, tendo servido essencialmente para deduzir ou demonstrar determinadas expressões necessárias ao conhecimento do comportamento dos modelos estocásticos aplicáveis, bem como à determinação de probabilidades dos diversos acontecimentos envolvidos. Contudo, nota-se de uma maneira geral que as transformadas constituem basicamente um passo intermédio das soluções apresentadas, não se utilizando, com raras excepções, a sua inversão algébrica como processo directo de cálculo ou como fórmula resolvente de numerosas questões.

Procuraremos dar neste capítulo alguns exemplos concretos das vantagens práticas de uma maior utilização das transformadas descritas no capítulo anterior, na certeza que muito haverá ainda para investigar no domínio destas transformadas, cuja vastidão temos por considerável. Desde a determinação algébrica de expressões para distribuições de diversos tipos, probabilidades de ruína em tempo finito ou infinito, gravidade de ruína, ou outras, até ao cálculo numérico directo daquelas probabilidades ou de valores associados, muitas soluções são teoricamente possíveis por recurso à inversão das respectivas transformadas.

A secção 4.2 é dedicada às distribuições agregadas no processo de Poisson composto, apresentando-se fórmulas explícitas para o cálculo das funções densidade e distribuição de $S(t)$ nos casos em que a distribuição das indemnizações particulares é do tipo Erlang.

A secção 4.3 é dedicada à obtenção das funções características correspondentes a processos de renascimento (de contagem e composto). Para o efeito recorreremos a duplas transformadas de Fourier, sendo no final apresentados alguns exemplos concretos para determinadas distribuições dos tempos inter-ocorrências.

4.2 Distribuições agregadas no processo de Poisson composto

Como é sabido, num processo de Poisson composto $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, a função característica da variável aleatória $S(t)$ é

$$\varphi_t(s) = e^{\lambda t[\omega(s)-1]}, \quad (4.1)$$

expressão na qual $\omega(s)$ representa a função característica da variável aleatória X correspondente ao montante individual de sinistro. No caso de X ser contínua e $F_X(0) = 0$ (o mais comum), a expressão para a transformada de Laplace é em tudo idêntica a (4.1), representando nesse caso $\omega(s)$ a T.L. da densidade $f_X(x)$.

Exemplo 4.1 *Indemnizações particulares com distribuição exponencial. Se X tiver distribuição exponencial de valor médio $1/\alpha$, a T.L. correspondente será*

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}, \quad (4.2)$$

pelo que, nesse caso teremos

$$\varphi_t(s) = e^{\lambda t\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}-1\right)}. \quad (4.3)$$

Designando por $F(t, x)$ e $f(t, x)$, respectivamente, as funções de distribuição e densidade da v.a. $S(t)$, teremos, por aplicação da fórmula de inversão (3.12),

$$f(t, x) = \sum \left\{ \text{resíduos de } e^{sx + \lambda t\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}-1\right)} \right\}, \quad (4.4)$$

expressão na qual se considera s no campo complexo. Verifica-se com facilidade que a função integranda (note-se que a fórmula de inversão baseia-se no cálculo de um integral em \mathbb{C}) tem um único ponto singular para $s = -\alpha$. Trata-se de uma singularidade essencial, que implica o desenvolvimento da função em série de Laurent. Para o efeito, há que efectuar a transformação $s = z - \alpha$, a fim de obter o desenvolvimento em potências de $z = (s + \alpha)$ e posteriormente, separar o expoente em fracções simples. Assim, após simplificação, teremos,

$$e^{sx + \lambda t\left(\frac{\alpha}{\alpha+s}-1\right)} = e^{-(\lambda t + \alpha x)} e^{xz} e^{\alpha \lambda \frac{t}{z}}. \quad (4.5)$$

Desenvolvendo as exponenciais que contêm z em série de potências, efectuando o seu produto e isolando o coeficiente de z^{-1} , o qual constitui o resíduo no ponto $z = 0$, obtém-se após simplificação,

$$e^{xz} e^{\alpha \lambda \frac{t}{z}} = \dots + \left(\alpha \lambda t + \frac{x(\alpha \lambda t)^2}{1!2!} + \frac{x^2(\alpha \lambda t)^3}{2!3!} + \dots \right) z^{-1} + \dots \quad (4.6)$$

Finalmente, teremos,

$$f(t, x) = e^{-(\lambda t + \alpha x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\alpha \lambda t)^{k+1}}{k! (k+1)!}, \quad (4.7)$$

expressão que se pode ainda exprimir numa função de Bessel de tipo I_1 , como segue:

$$f(t, x) = e^{-(\lambda t + \alpha x)} \alpha \lambda t \frac{\text{Bessel} I_1 \left(2\sqrt{(x\alpha \lambda t)} \right)}{\sqrt{(x\alpha \lambda t)}}. \quad (4.8)$$

Para determinar a função de distribuição $F(t, x)$, comecemos por aplicar a propriedade 5 das transformadas de Laplace. Teremos assim para a transformada desta função,

$$\phi_t(s) = \frac{1}{s} e^{\lambda t \left(\frac{\alpha}{\alpha+s} - 1 \right)}. \quad (4.9)$$

Por aplicação da fórmula de inversão (3.12), teremos então

$$F(t, x) = \sum \left\{ \text{resíduos de } \frac{1}{s} e^{sx + \lambda t \left(\frac{\alpha}{\alpha+s} - 1 \right)} \right\}. \quad (4.10)$$

Verifica-se com facilidade que a função integranda

$$g(s) = \frac{1}{s} e^{sx + \lambda t \left(\frac{\alpha}{\alpha+s} - 1 \right)}, \quad (4.11)$$

tem um polo simples para $s = 0$, cujo resíduo será $\left[e^{sx + \lambda t \left(\frac{\alpha}{\alpha+s} - 1 \right)} \right]_{s=0} = 1$ e uma singularidade essencial para $s = -\alpha$, tal como acontece para a transformada da função densidade. Efectuando a mudança de variável $s = z - \alpha$, como anteriormente, virá

$$g(z) = e^{-(\lambda t + \alpha x)} \frac{1}{z - \alpha} e^{xz} e^{\alpha \lambda \frac{t}{z}}. \quad (4.12)$$

Neste caso, porém, para a determinação do resíduo, há que efectuar o produto das três séries resultantes do desenvolvimento de cada um dos factores que, na expressão anterior, contêm a variável z e isolar o coeficiente de z^{-1} . Após efectuar o produto, verifica-se que

$$\frac{1}{z - \alpha} e^{xz} e^{\alpha \lambda \frac{t}{z}} = - \left[\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\alpha \lambda t)^{j+k-1}}{k! (j+k-1)!} \right] z^{-1} + \dots, \quad (4.13)$$

pelo que, finalmente, teremos

$$F(t, x) = e^{-\lambda t} + 1 - e^{-(\lambda t + \alpha x)} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k (\alpha \lambda t)^{j+k-1}}{k! (j+k-1)!}. \quad (4.14)$$

Notamos que a adição da parcela $\exp(-\lambda t)$ se deve ao facto de na propriedade 5, se considerar que a primitiva tem um valor zero na origem, o que neste caso é falso. Por essa razão, esse valor, quando diferente de zero, tem de ser adicionado após inversão. Deve igualmente acentuar-se que o valor do segundo somatório da relação (4.14) se pode obter mais facilmente por recurso às funções de Bessel do tipo I as quais são definidas no Anexo III.

Exemplo 4.2 Indemnizações particulares com distribuição de Erlang $(2, \alpha)$. Se X tiver distribuição Erlang $(2, \alpha)$, a T.L. correspondente será

$$\omega(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^2, \quad (4.15)$$

pelo que, neste caso temos

$$\varphi_t(s) = e^{\lambda t \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+s} \right)^2 - 1 \right)}. \quad (4.16)$$

Designando por $F(t, x)$ e $f(t, x)$, respectivamente, as funções de distribuição e densidade da variável aleatória $S(t)$, teremos, por aplicação da fórmula de inversão (3.12),

$$f(t, x) = \sum \left\{ \text{resíduos de } e^{sx + \lambda t \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^2 - 1 \right)} \right\}, \quad (4.17)$$

expressão na qual se considera s no campo complexo. Verifica-se com facilidade que a função integranda tem um único ponto singular para $s = -\alpha$. Tal como no caso exponencial, trata-se de uma singularidade essencial, que implica o desenvolvimento da função em série de Laurent. Para o efeito, há que efectuar a transformação $s = z - \alpha$, a fim de obter o desenvolvimento em potências de $z = (s + \alpha)$ e posteriormente, separar o expoente em fracções simples. Assim, após simplificação, teremos,

$$e^{sx + \lambda t \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^2 - 1 \right)} = e^{-(\lambda t + \alpha x)} e^{xz} e^{\lambda t \frac{\alpha^2}{z^2}}. \quad (4.18)$$

Desenvolvendo os factores exponenciais que contêm z em série de potências, efectuando o seu produto e determinando o coeficiente de z^{-1} , o qual constitui a parte essencial do resíduo no ponto $z = 0$, teremos

$$e^{xz} e^{\alpha^2 \lambda \frac{t}{z}} = \dots + \left(x (\alpha^2 \lambda t) + \frac{x^3 (\alpha^2 \lambda t)^2}{3!2!} + \dots \right) z^{-1} + \dots, \quad (4.19)$$

pelo que,

$$f(t, x) = e^{-(\lambda t + \alpha x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(2k-1)} (\alpha^2 \lambda t)^k}{(2k-1)! (k)!}, \quad (4.20)$$

expressão que se pode exprimir na função hipergeométrica generalizada de Barnes (ver Anexo III), a qual se encontra pré-programada em diversos programas matemáticos como por exemplo o Maple, dando origem à seguinte igualdade:

$$f(t, x) = \alpha^2 \lambda x t \text{ hypergeom} \left(\emptyset, \left[2, \frac{3}{2} \right], \frac{1}{4} x^2 \alpha^2 \lambda t \right). \quad (4.21)$$

Na expressão anterior o primeiro argumento não existe, motivo pelo qual se utilizou o símbolo de vazio em primeiro lugar. A extensão à função de distribuição, far-se-ia de forma análoga à efectuada para a exponencial, recorrendo à propriedade 5 das T.L., obtendo-se no final um duplo somatório idêntico ao da fórmula (4.14).

Exemplo 4.3 Indemnizações particulares com distribuição de Erlang generalizada. Se X tiver distribuição $\Gamma(n, \alpha)$, com n inteiro, a T.L. tem a forma

$$\omega(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^n, \quad (4.22)$$

pelo que, neste caso a f.c. de $S(t)$ será

$$\varphi_t(s) = e^{\lambda t \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha + s} \right)^n - 1 \right)}. \quad (4.23)$$

Designando por $F(t, x)$ e $f(t, x)$, respectivamente, as funções de distribuição e densidade da variável aleatória $S(t)$, teremos, por aplicação da fórmula de inversão (3.12),

$$f(t, x) = \sum \left\{ \text{resíduos de } e^{sx+\lambda t} \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+s} \right)^n - 1 \right) \right\}, \quad (4.24)$$

expressão na qual se considera s no campo complexo. Verifica-se com facilidade que a função integranda tem um único ponto singular para $s = -\alpha$. Tal como no caso exponencial, trata-se de uma singularidade essencial, que implica o desenvolvimento da função em série de Laurent. Para o efeito, há que efectuar a transformação $s = z - \alpha$, a fim de obter o desenvolvimento em potências de $z = (s + \alpha)$ e posteriormente, separar o expoente em fracções simples. Assim, após simplificação, teremos,

$$e^{sx+\lambda t} \left(\left(\frac{\alpha}{\alpha+s} \right)^n - 1 \right) = e^{-(\lambda t + \alpha x)} e^{xz} e^{\lambda t \frac{\alpha^n}{z^n}}. \quad (4.25)$$

Desenvolvendo as exponenciais que contêm z em série de potências, efectuando o seu produto e determinando o coeficiente de z^{-1} , o qual constitui o resíduo no ponto $z = 0$, teremos

$$e^{xz} e^{\lambda t \frac{\alpha^n}{z^n}} = \left[\frac{x^{n-1} \lambda t \alpha^n}{(n-1)!} + \frac{x^{2n-1} (\lambda t)^2 \alpha^{2n}}{(2n-1)! 2!} + \dots \right] z^{-1} + \dots,$$

pelo que,

$$f(t, x) = e^{-(\lambda t + \alpha x)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{(kn-1)} (\alpha^n \lambda t)^k}{(kn-1)! (k)!}, \quad (4.26)$$

expressão que se pode exprimir na função hipergeométrica generalizada (ver Anexo III).

Exemplo 4.4 Indemnizações particulares com distribuição de Erlang $(4, \alpha)$.

Aplicando a relação (4.26) obtemos para a função densidade,

$$f(t, x) = e^{-\lambda t - x\alpha} \frac{x^3 \alpha^4 \lambda t}{6} \text{hypergeom} \left(\emptyset, \left[2, \frac{7}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \right], \frac{1}{256} x^4 \alpha^4 \lambda t \right). \quad (4.27)$$

4.3 Distribuições no processo de renovamento composto

4.3.1 Função característica do processo de contagem

No caso de $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ ser um processo de renovamento ordinário e considerando a função de probabilidade definida em (2.1), a função característica $\chi(u, t)$ da v.a. $N(t)$ vem dada pela expressão

$$\chi(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} [G^{k*}(t) - G^{(k+1)*}(t)]. \quad (4.28)$$

Uma vez que $\chi(u, t)$ é função de t , fixado u , podemos determinar a correspondente transformada de Fourier que designaremos por $Q(u, v)$.

Nota: neste caso particular e até ao fim do presente capítulo, porque estamos essencialmente a trabalhar com funções características, vamos eliminar o sinal negativo na definição das transformadas de Fourier. Por definição teremos então

$$Q(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{iut} \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} [G^{k*}(t) - G^{(k+1)*}(t)] \right\} dt. \quad (4.29)$$

Uma vez que as séries implícitas na relação anterior são uniformemente convergentes, podemos efectuar a integração termo a termo, daí resultando,

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} [G^{k*}(t) - G^{(k+1)*}(t)] dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} [\psi_{k*}(v) - \psi_{(k+1)*}(v)], \end{aligned} \quad (4.30)$$

expressão onde $\psi_{k*}(v)$ representa a transformada de Fourier correspondente à função de distribuição da convolução de ordem k da v.a. T (tempo inter-sinistros consecutivos). Torna-se pois necessário exprimir esta função na f.c. $\psi(v)$ de T . Pela propriedade 6, expressão (3.19) com o sinal corrigido, atendendo a que $g(t)$ se supõe função contínua com $G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$, teremos

$$\psi_{k*}(v) - \psi_{(k+1)*}(v) = \frac{i}{v} [\psi^k(v) - \psi^{k+1}(v)]. \quad (4.31)$$

Substituindo na expressão anterior, obtemos

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \frac{i}{v} \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} [\psi^k(v) - \psi^{k+1}(v)] \\ &= \frac{i}{v} [1 - \psi(v)] \sum_{k=0}^{\infty} [e^{iu} \psi(v)]^k. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Finalmente, teremos

$$Q(u, v) = \frac{i [1 - \psi(v)]}{v [1 - e^{iu} \psi(v)]}. \quad (4.33)$$

Esta dupla transformada pode ser agora invertida em relação a v , dando lugar à f.c. de $N(t)$. Através da relação (3.27) teremos

$$\chi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} \frac{i [1 - \psi(v)]}{v [1 - e^{iu} \psi(v)]} dv. \quad (4.34)$$

O integral que aparece na expressão anterior pode ser calculado pelo teorema dos resíduos. Para o efeito considera-se v no campo complexo e deve notar-se que $v = 0$ constitui uma singularidade amovível. As restantes singularidades dependem da maior ou menor complexidade da f.c. $\psi(v)$, pelo que o cálculo dos resíduos necessários será mais ou menos difícil consoante os casos concretos a considerar. Assim, por exemplo, para o processo Erlang(2, α) teremos

$$\psi(v) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iv} \right)^2 \quad (4.35)$$

e a função integranda após simplificação virá

$$e^{-ivt} \frac{i(1 - \psi(v))}{v(1 - e^{iu}\psi(v))} = \frac{e^{-ivt} i [(\alpha - iv)^2 - \alpha^2]}{v [(\alpha - iv)^2 - \alpha^2 e^{iu}]}. \quad (4.36)$$

Torna-se simples verificar que as raízes do denominador são 0 e

$$\begin{aligned} v_1 &= -i\alpha(1 - e^{iu/2}) \\ v_2 &= -i\alpha(1 + e^{iu/2}). \end{aligned}$$

Neste caso v_0 e v_1 são polos simples da função integranda e o integral pode ser calculado pelo teorema dos resíduos (ver Anexo I). Teremos assim

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \frac{i[1 - \psi(v)]}{v[1 - e^{iu}\psi(v)]} dv = -i(R_1 + R_2), \quad (4.37)$$

onde R_1 e R_2 são os resíduos em v_1 e v_2 respectivamente. para determinar os resíduos é conveniente escrever a função integranda na forma $q(v)/h(v)$ ou seja,

$$e^{-ivt} \frac{i[1 - \psi(v)]}{v[1 - e^{iu}\psi(v)]} = \frac{q(v)}{h(v)} = \frac{e^{-ivt} i [(\alpha - iv)^2 - \alpha^2]}{v [(\alpha - iv)^2 - \alpha^2 e^{iu}]} \quad (4.38)$$

Sabe-se da análise complexa (ver Anexo I) que num polo simples z_0 , o resíduo é dado pelo cociente $q(z_0)/h'(z_0)$, pelo que da expressão anterior obtemos

$$R(z_0) = \frac{q(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{e^{-iz_0 t} i [(\alpha - iz_0)^2 - \alpha^2]}{z_0 [-2i [(\alpha - iz_0)]]}. \quad (4.39)$$

Substituindo na expressão anterior z_0 por v_0 e v_1 , respectivamente e simplificando, obtemos

$$R_0 = \frac{e^{\alpha t(e^{iu/2}-1)}(e^{iu} - 1)}{-2ie^{iu/2}(e^{iu/2} - 1)} \quad (4.40)$$

e

$$R_1 = \frac{e^{-\alpha t(e^{iu/2}+1)}(e^{iu} - 1)}{-2ie^{iu/2}(e^{iu/2} + 1)}, \quad (4.41)$$

pelo que

$$\begin{aligned} R_0 + R_1 &= \frac{i}{2} e^{-\alpha t} [e^{\alpha t e^{iu/2}} (1 + e^{-iu/2}) + e^{-\alpha t e^{iu/2}} (1 - e^{-iu/2})] \\ &= i e^{-\alpha t} [\cosh(\alpha t e^{iu/2}) + e^{-iu/2} \sinh(\alpha t e^{iu/2})]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Substituindo (4.42) em (4.37) temos finalmente

$$\chi(u, t) = e^{-\alpha t} [\cosh(\alpha t e^{iu/2}) + e^{-iu/2} \sinh(\alpha t e^{iu/2})]. \quad (4.43)$$

Nota : existem outros métodos para determinação da função característica de processos de renascimento ordinários (ver (Parzen 1964)). Todavia, a fórmula (4.33) para a dupla transformada de Fourier tem vantagens, como se verá no caso das distribuições agregadas.

Se o processo de contagem for um processo de renovamento adiado, sendo $H(t)$ a função de distribuição do tempo até à ocorrência do primeiro sinistro, teremos $H(t) \neq G(t)$. Seguindo os passos do processo de renovamento ordinário teremos:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= 1 - H(t) \\ p_1(t) &= H(t) - H(t) * G(t) \\ p_k(t) &= H(t) * G^{(k-1)*}(t) - H(t) * G^{k*}(t). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Representando por $\chi(u, t)$ a f.c. de $N(t)$, podemos escrever

$$\chi(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} p_k(t) = 1 - H(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} [H(t) * G^{(k-1)*}(t) - H(t) * G^{k*}(t)]. \quad (4.45)$$

Como $\chi(u, t)$ é função de t , podemos determinar a correspondente transformada de Fourier

$$Q(u, v) = \int_0^{+\infty} e^{ivt} \left\{ 1 - H(t) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} [H(t) * G^{(k-1)*}(t) - H(t) * G^{k*}(t)] \right\} dt. \quad (4.46)$$

Integrando termo a termo a série anterior, obtém-se

$$Q(u, v) = \int_0^{+\infty} e^{ivt} (1 - H(t)) dt + \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} \int_0^{+\infty} e^{ivt} [H(t) * G^{(k-1)*}(t) - H(t) * G^{k*}(t)] dt. \quad (4.47)$$

Sabe-se todavia que, pela propriedade 6 das transformadas de Fourier, a transformada de uma função de distribuição se pode exprimir na transformada da respectiva densidade através da relação

$$\varphi_{1-H(t)}(v) = \frac{i[1 - H(0)]}{v} - \frac{i}{v} \varphi(v), \quad (4.48)$$

na qual $\varphi(v)$ é a f.c. correspondente a $H'(t)$. Aplicando esta propriedade a $Q(u, v)$ e considerando que $H(0) = 0$, obtém-se, após simplificação,

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \frac{i}{v} (1 - \varphi(v)) + \frac{\varphi(v)i}{v} \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} [\psi^{k-1}(v) - \psi^k(v)] \\ &= \frac{i}{v} (1 - \varphi(v)) + \frac{\varphi(v)i}{v} (1 - \psi(v)) \sum_{k=1}^{\infty} e^{iuk} \psi^{k-1}(v) \\ &= \frac{i}{v} (1 - \varphi(v)) + \frac{\varphi(v)i}{v} (1 - \psi(v)) e^{iu} \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk} \psi^k(v). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Finalmente teremos

$$Q(u, v) = \frac{i}{v} (1 - \varphi(v)) + \frac{\varphi(v)i}{v} \frac{[1 - \psi(v)] e^{iu}}{[1 - e^{iu} \psi(v)]}. \quad (4.50)$$

Podemos agora inverter esta transformada, obtendo a expressão da f.c. de $N(t)$, ou seja,.

$$\chi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \left\{ \frac{i}{v} (1 - \varphi(v)) + \frac{i\varphi(v) [1 - \psi(v)] e^{iu}}{v [1 - e^{iu}\psi(v)]} \right\} dv. \quad (4.51)$$

Como no caso ordinário, o integral da expressão anterior pode ser avaliado pelo teorema dos resíduos, após substituição das f.c. $\varphi(v)$ e $\psi(v)$, pelas respectivas expressões algébricas, na função integranda.

Se o processo de renovamento for estacionário teremos necessariamente para função de distribuição de T_1 ,

$$H(t) = \beta \int_0^t [1 - G(s)] ds, \quad (4.52)$$

relação na qual $G(t)$ é a função de distribuição dos tempos inter-sinistros seguintes. Uma vez que $H'(t) = \beta(1 - G(t))$, a f.c. $\varphi(v) = \beta i(1 - \psi(v))/v$ e a última expressão virá

$$\chi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \left\{ \frac{i}{v} + \frac{\beta}{v^2} [1 - \psi(v)] - \frac{\beta [1 - \psi(v)]^2 e^{iu}}{v^2 [1 - e^{iu}\psi(v)]} \right\} dv. \quad (4.53)$$

Se $G(t)$ tem distribuição exponencial com $\beta = \alpha$, teremos

$$\psi(v) = \frac{\alpha}{\alpha - iv}$$

e

$$e^{-ivt} \left(\frac{i}{v} + \frac{\beta}{v^2} (1 - \psi(v)) - \frac{\beta (1 - \psi(v))^2 e^{iu}}{v^2 (1 - e^{iu}\psi(v))} \right) = i \frac{e^{-ivt}}{i\alpha + v - ie^{iu}\alpha}, \quad (4.54)$$

pelo que o resíduo no ponto $\{v = -i\alpha + ie^{iu}\alpha\}$, única raiz do denominador, será

$$R(v) = ie^{-ivt} = i \exp(\alpha(-1 + e^{iu})t), \quad (4.55)$$

sendo a f.c. dada por

$$\chi(u, t) = \exp(\alpha t (e^{iu} - 1)), \quad (4.56)$$

ou seja a f.c. de uma variável aleatória $N(t)$ com distribuição de Poisson de valor médio αt .

Exemplo 4.5 Se os tempos inter-ocorências após o primeiro sinistro tiverem distribuição $\Gamma(2, 2)$, temos $\psi(v) = (2/(2 - iv))^2$ e, após simplificação, a f.c. ficará

$$\chi(u, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \frac{v + 3i + ie^{iu}}{-4 + 4iv + v^2 + 4e^{iu}} dv. \quad (4.57)$$

Considerando v no campo complexo, os pontos singulares da função integranda são :

$$v_1 = -2i + 2i\sqrt{e^{iu}}$$

e

$$v_2 = -2i - 2i\sqrt{e^{iu}},$$

pelo que a expressão para avaliação dos resíduos será

$$R(v) = e^{-ivt} \frac{v + 3i + ie^{iu}}{4i + 2v}. \quad (4.58)$$

A f.c. de $N(t)$ virá então dada pela expressão

$$\begin{aligned} \chi(u, t) &= R(v_1) + R(v_2) \\ &= \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}iu} e^{-2t} e^{2te^{\frac{1}{2}iu}} + \frac{1}{2} \exp\left(-2\left(1 - e^{\frac{1}{2}iu}\right)t\right) + \frac{1}{4} e^{-2t} e^{2te^{\frac{1}{2}iu}} e^{\frac{1}{2}iu} \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}iu} e^{-2t} e^{-2te^{\frac{1}{2}iu}} + \frac{1}{2} \exp\left(-2\left(1 + e^{\frac{1}{2}iu}\right)t\right) - \frac{1}{4} e^{-2t} e^{-2te^{\frac{1}{2}iu}} e^{\frac{1}{2}iu} \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} e^{2te^{\frac{1}{2}iu}} \cosh\left(\frac{1}{2}iu\right) - \frac{1}{2} e^{-2t} e^{-2te^{\frac{1}{2}iu}} \cosh\left(\frac{1}{2}iu\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp\left(-2t\left(1 - e^{\frac{1}{2}iu}\right)\right) + \frac{1}{2} \exp\left(-2t\left(1 + e^{\frac{1}{2}iu}\right)\right). \\ &= e^{-2t} \cosh\left(\frac{1}{2}iu\right) \frac{1}{2} \left(e^{2te^{\frac{1}{2}iu}} - e^{-2te^{\frac{1}{2}iu}}\right) + e^{-2t} \cosh\left(2te^{\frac{1}{2}iu}\right). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Após simplificação teremos,

$$\chi(u, t) = e^{-2t} \left[\cosh\left(\frac{1}{2}iu\right) \sinh\left(2te^{\frac{1}{2}iu}\right) + \cosh\left(2te^{\frac{1}{2}iu}\right) \right]. \quad (4.60)$$

4.3.2 Função característica da distribuição agregada

Continuando a representar por $S(t)$ o montante das indenizações agregadas no intervalo $(0, t]$, verifica-se que esta v.a. tem por função característica

$$\xi(u, t) = M_{N(t)}[\log \omega(u)], \quad (4.61)$$

na qual $M_{N(t)}(s)$ é a função geradora de momentos de $N(t)$ e $\omega(u)$ representa a f.c. do montante de uma indenização particular (ver (Centeno 2001)). Se representarmos por $\chi(u, t)$ a f.c. de $N(t)$, teremos $M_{N(t)}(s) = \chi(-is, t)$, e a igualdade anterior pode então ser escrita na forma

$$\xi(u, t) = \chi[-i \log \omega(u), t]. \quad (4.62)$$

Notamos que os logaritmos usados são naturais.

Se, por exemplo, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ for um processo de Erlang $(2, \alpha)$, isto é, se estamos em presença de um processo de renovamento ordinário com distribuição comum $\Gamma(2, \alpha)$ para os diversos tempos inter-ocorrências, podemos usar a relação (4.43) para obter a respectiva função característica. Teremos assim,

$$\xi(u, t) = e^{-\alpha t} \left[\cosh(\alpha t \sqrt{\omega(u)}) + \frac{1}{\sqrt{\omega(u)}} \sinh(\alpha t \sqrt{\omega(u)}) \right]. \quad (4.63)$$

Se, por exemplo, $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ for um processo de Erlang $(2, 2)$ estacionário, a relação (4.60) permite-nos concluir que,

$$\begin{aligned}
\xi(u, t) &= \chi[-i \log \omega(u), t] \\
&= e^{-2t} \left[\cosh \left(\frac{1}{2} \log \omega(u) \right) \sinh \left(2te^{\frac{1}{2} \log \omega(u)} \right) + \cosh \left(2te^{\frac{1}{2} \log \omega(u)} \right) \right] \\
&= e^{-2t} \left[\frac{\omega(u) + 1}{\sqrt{\omega(u)}} \sinh \left(2t\sqrt{\omega(u)} \right) + \cosh \left(2t\sqrt{\omega(u)} \right) \right]. \tag{4.64}
\end{aligned}$$

Notamos no entanto que, caso não seja possível determinar uma expressão algébrica para a f.c. da distribuição agregada, poderá ser útil utilizar directamente as relações integrais que resultam da primeira inversão da dupla transformada $Q(u, v)$ de $N(t)$, a partir das quais, substituindo $\exp(iu)$ por $\omega(u)$ se obtêm directamente relações integrais para $\xi(u, t)$. Assim, efectuando aquela substituição em (4.34), (4.51) e (4.53), respectivamente, obtemos:

1 - para o processo de renovamento ordinário,

$$\xi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \frac{i[1 - \psi(v)]}{v[1 - \omega(u)\psi(v)]} dv, \tag{4.65}$$

2 - para o processo de renovamento adiado ou diferido,

$$\xi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \left\{ \frac{i}{v}(1 - \varphi(v)) + \frac{i\varphi(v)[1 - \psi(v)]\omega(u)}{v[1 - \omega(u)\psi(v)]} \right\} dv, \tag{4.66}$$

3 - para o processo de renovamento estacionário,

$$\xi(u, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ivt} \left\{ \frac{i}{v} + \frac{\beta}{v^2}[1 - \psi(v)] - \frac{\beta[1 - \psi(v)]^2\omega(u)}{v^2[1 - \omega(u)\psi(v)]} \right\} dv. \tag{4.67}$$

Capítulo 5

Aplicação das transformadas na teoria da ruína

5.1 Introdução

A aplicação de transformadas na teoria da ruína constitui um vastíssimo campo de investigação, parte do qual já profundamente desbravado, mas que ainda assim, tem o condão de nos surpreender sempre que sobre ele nos debruçamos com redobrada atenção. Em particular, a inversão algébrica ou numérica de transformadas explícitas ou implícitas, presentes em expressões diversas, que conduzem directamente a probabilidades de ruína ou sobrevivência, quer em horizonte infinito, quer finito, revela-se de especial interesse e utilidade, como se verá ao longo do presente capítulo, nomeadamente através dos diversos exemplos concretos apresentados.

A secção 5.2 é dedicada à determinação da probabilidade de não ruína para o modelo clássico, recorrendo à respectiva transformada de Fourier, obtida a partir da fórmula (1.16) referente à perca agregada máxima.

Na secção 5.3 procedemos à dedução de uma fórmula integral para o cálculo da probabilidade de ruína eventual para o modelo clássico, partindo da fórmula de Seal e recorrendo a transformadas de Fourier.

A secção 5.4, que consideramos uma das mais relevantes do trabalho de investigação efectuado, é inteiramente dedicada à distribuição do tempo de ruína e à obtenção de fórmulas explícitas para a probabilidade de ruína ou sobrevivência em tempo finito. Para o efeito, procede-se à inversão da dupla transformada de Laplace para o tempo de ruína deduzida por Gerber e Shiu em 1998.

Na secção 5.5 estabelecemos uma fórmula aproximada para a probabilidade de ruína em tempo finito para o modelo clássico, partindo da distribuição agregada dos incrementos da perca agregada máxima.

Na secção 5.6 procedemos à inversão da transformada de Laplace da probabilidade de não ruína para o modelo de renascimento conhecido por modelo de Sparre Andersen.

5.2 Cálculo da probabilidade de sobrevivência pela perca agregada máxima

No modelo clássico de risco, viu-se pelo teorema 1.6 que a probabilidade de sobrevivência (ou não ruína) $\sigma(u)$, pode ser calculada como a função de distribuição de uma geométrica composta, dada pela expressão (1.16), que aqui se reproduz:

$$\sigma(u) = \sigma(0) \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(0)]^k H^{k*}(u), \quad u \geq 0, \quad (5.1)$$

expressão na qual $H^{k*}(\cdot)$ representa a distribuição da soma de quaisquer k incrementos sucessivos. Viu-se também pelo teorema 1.5 que,

$$H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy. \quad (5.2)$$

Derivando ambos os membros da igualdade (5.1) em ordem a u , teremos

$$\sigma'(u) = \sigma(0) \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(0)]^k h^{k*}(u), \quad (5.3)$$

expressão em que $h^{k*}(\cdot)$ é a densidade correspondente à soma de k incrementos sucessivos. Como um dado incremento tem por densidade

$$h(x) = \frac{1}{\mu} [1 - F(x)], \quad (5.4)$$

a transformada de Fourier de $\sigma'(u)$ será

$$\widehat{\sigma'}(s) = \sigma(0) \sum_{k=0}^{\infty} [\psi(0)]^k \varphi_h^k(s) = \frac{\sigma(0)}{1 - \psi(0) \varphi_h(s)}, \quad (5.5)$$

onde, pela propriedade 6 das transformadas de Fourier,

$$\varphi_h(s) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\mu} [1 - F(x)] \right\} = \frac{i [1 - \widehat{f}(s)]}{\mu s}. \quad (5.6)$$

Substituindo a expressão anterior em (5.5) teremos finalmente

$$\widehat{\sigma'}(s) = \frac{\sigma(0)}{1 + \psi(0) \frac{i [1 - \widehat{f}(s)]}{\mu s}}. \quad (5.7)$$

Pela fórmula de inversão da transformada de Fourier, podemos calcular algebricamente $\sigma'(u)$ e, por primitivação, obter facilmente a expressão de $\sigma(u)$, atendendo a que $\sigma(\infty) = 1$.

Exemplo 5.1 *Indemnizações particulares com distribuição de Erlang (2, 2). Se X tiver distribuição Erlang (2, 2), considerando que $\lambda = 1$ e $\rho = 10\%$ teremos*

$$\sigma(0) = 1 - \psi(0) = 1 - \frac{1}{1.1}$$

e

$$\hat{f}(s) = \left(\frac{2}{2 + is} \right)^2,$$

pelo que

$$\hat{\sigma}'(s) = \frac{\sigma(0)}{1 + \psi(0) \frac{i[1 - \hat{f}(s)]}{\mu s}} = \frac{(2 + is)^2}{4 + 34is - 11s^2}. \quad (5.8)$$

Pela fórmula de inversão teremos neste caso

$$\sigma'(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isu} \frac{(2 + is)^2}{4 + 34is - 11s^2} ds. \quad (5.9)$$

Vê-se com simplicidade que a função integranda é analítica excepto para os zeros do denominador que são

$$\begin{aligned} s_1 &= .122\,502\,196\,136i \\ s_2 &= 2.968\,406\,894\,77i, \end{aligned} \quad (5.10)$$

os quais são polos simples daquela função. Os resíduos vêm dados pela expressão

$$R(s) = e^{isu} \frac{(2 + is)^2}{34i - 22s}, \quad (5.11)$$

pelo que, não considerando o factor 2π que se simplifica, teremos para valor do integral

$$\begin{aligned} i(R(s_1) + R(s_2)) &= .112\,601\,930\,806 \exp(-.122\,502\,196\,136u) \\ &\quad - 2.995\,730\,270\,65 \times 10^{-2} \exp(-2.968\,406\,894\,77u). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Integrando esta última expressão em ordem a u e simplificando, temos finalmente

$$\begin{aligned} \sigma(u) &= 1 - .919\,182\,956\,369 \exp(-.122\,502\,196\,136u) \\ &\quad + 1.009\,204\,727\,27 \times 10^{-2} \exp(-2.968\,406\,894\,77u), \end{aligned} \quad (5.13)$$

ou

$$\begin{aligned} \psi(u) &= .919\,182\,956\,369 \exp(-.122\,502\,196\,136u) \\ &\quad - 1.009\,204\,727\,27 \times 10^{-2} \exp(-2.968\,406\,894\,77u) \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.3 A fórmula de Seal em horizonte infinito

A equação de Seal (1.22) que aqui se reproduz,

$$\sigma(u, t) = F(t, u + ct) - c \int_0^t \sigma(0, t - \tau) dF(\tau, u + c\tau), \quad (5.15)$$

permite o cálculo da probabilidade de sobrevivência para o processo clássico de risco em qualquer intervalo de amplitude t . Em particular, se na relação anterior considerarmos o limite quando $t \rightarrow \infty$, podemos enunciar o seguinte teorema

Teorema 5.1 *Se a distribuição agregada de sinistros segue um processo de Poisson homogéneo composto, então, para uma reserva inicial $u \geq 0$, é válida a relação*

$$\psi(u) = 1 - \sigma(u) = c\sigma(0) \int_0^\infty dF(\tau, u + c\tau). \quad (5.16)$$

Demonstração Em primeiro lugar, vamos demonstrar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t, u + ct) = P[S(t) \leq u + ct] = 1. \quad (5.17)$$

Com efeito, considerando $S(t)$ o montante das indemnizações agregadas até ao instante t e admitindo que $E[S(t)] = \lambda\mu t < ct$, podemos concluir, como consequência da lei dos grandes números que, com probabilidade 1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{t} = \lambda\mu < c.$$

A partir da relação anterior podemos admitir que existe uma variável aleatória T para a qual, para todo o valor de t tal que $t > T$, se verifica, com probabilidade 1, a desigualdade

$$S(t) < u + ct, \quad (5.18)$$

pelo que a relação (5.17) se considera demonstrada. Por outro lado, por definição, para qualquer valor finito τ , é válida a igualdade

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(0, t - \tau) = \sigma(0).$$

Considerando agora $s > T$, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \sigma(0, t - \tau) dF(\tau, u + c\tau) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{ks} \sigma(0, ks - \tau) dF(\tau, u + c\tau) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^s \sigma(0, ks - \tau) dF(\tau, u + c\tau) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_s^{ks} \sigma(0, ks - \tau) dF(\tau, u + c\tau) \\ &= \sigma(0) \int_0^s dF(\tau, u + c\tau) d\tau + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_s^{ks} \sigma(0, ks - \tau) dF(\tau, u + c\tau). \end{aligned}$$

Uma vez que para $\tau \geq s > T$, $dF(\tau, u + c\tau) = 0$ com probabilidade 1, o último limite é zero e

$$\sigma(0) \int_0^s dF(\tau, u + c\tau) = \sigma(0) \int_0^\infty dF(\tau, u + c\tau),$$

pelo que o teorema se considera demonstrado. \square

Se $F(s, y)$ é derivável em ordem a y , a relação (5.16) pode escrever-se na forma

$$\psi(u) = c\sigma(0) \int_0^\infty f(\tau, u + c\tau) d\tau. \quad (5.19)$$

Conhecendo a função característica $\chi(s, \tau)$ da distribuição agregada no instante τ e recorrendo à fórmula de inversão para transformadas de Fourier, a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-is(u+c\tau)} \chi(s, \tau) ds d\tau. \quad (5.20)$$

Invertendo a ordem de integração obtemos

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-is(u+c\tau)} \chi(s, \tau) d\tau ds. \quad (5.21)$$

Devemos notar todavia que a mudança da ordem de integração implica a eliminação no intervalo de integração exterior do valor $s = 0$, para o qual o integral interior não converge, como facilmente se constata. Assim, o intervalo de integração exterior deve ser dividido em dois sub-intervalos - $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$. Contudo, mantendo esta ressalva em mente, por simplicidade de escrita, continuaremos a usar a notação correspondente ao intervalo original.

Considerando a função característica $\chi(s, \tau)$ correspondente ao processo de Poisson composto, da relação anterior obtém-se

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-is(u+c\tau) + \lambda\tau[\omega(s)-1]} d\tau ds. \quad (5.22)$$

Calculando o integral interior teremos

$$\int_0^\infty e^{-is(u+c\tau) + \lambda\tau[\omega(s)-1]} d\tau = \frac{e^{-ius}}{\lambda + isc - \lambda\omega(s)}. \quad (5.23)$$

Substituindo (5.23) em (5.21) obtemos a expressão

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ius}}{\lambda + isc - \lambda\omega(s)} ds. \quad (5.24)$$

O cálculo de $\psi(u)$ a partir da relação anterior pode ser efectuado pelo *Teorema dos resíduos* (ver Anexo I), considerando s no plano complexo e determinando os resíduos correspondentes aos diversos pontos singulares da função integranda com excepção do ponto $s = 0$, caso este seja também um ponto singular. Note-se que após a avaliação do integral

$$I(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ius}}{\lambda + isc - \lambda\omega(s)} ds, \quad (5.25)$$

falta determinar o valor de $\sigma(0)$ (de facto conhecido para o modelo clássico). Contudo, considerando $u = 0$ na relação (5.25), da expressão (5.24) resulta, após simplificação,

$$\sigma(0) = \frac{1}{1 + cI(0)}. \quad (5.26)$$

5.3.1 Exemplos

Exemplo 5.2 Se os montantes das indemnizações particulares têm distribuição exponencial de valor médio $1/\alpha$, então a função característica será

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{\alpha - is},$$

e por (5.24) teremos

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha - is) e^{-ius}}{is(\alpha c - \lambda) + s^2 c} ds. \quad (5.27)$$

O único ponto singular, excepto a origem será

$$s_1 = i \frac{\lambda - \alpha c}{c}, \quad (5.28)$$

verificando-se facilmente que se trata de um polo simples (de ordem 1). Para o cálculo do resíduo neste ponto dever-se-á escrever a função integranda na forma $q(s)/h(s)$. Da análise complexa sabe-se que o resíduo num polo simples se obtém pela relação $R = q(s_1)/h'(s_1)$ (ver Anexo I). Teremos assim,

$$\begin{aligned} R &= \frac{q(s_1)}{h'(s_1)} = \frac{(\alpha - is_1) e^{-ius_1}}{i(\alpha c - \lambda) + 2s_1 c} \\ &= \frac{(\alpha - is_1) e^{-ius_1}}{s_1 c} = \frac{(\alpha + \frac{\lambda - \alpha c}{c}) e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}}{i(\lambda - \alpha c)} \\ &= \frac{\lambda e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}}{ic(\lambda - \alpha c)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Considerando uma carga positiva no prémio c , podemos constatar que o polo s_1 está situado no semi-plano complexo inferior, pelo que pelo teorema dos resíduos, o valor do integral será $-2\pi i R$. A substituição de (5.29) em (5.24) conduz-nos à igualdade

$$\psi(u) = \frac{\lambda \sigma(0)}{\alpha c - \lambda} e^{-(\alpha - \frac{\lambda}{c})u}. \quad (5.30)$$

Considerando $u = 0$ e simplificando obtém-se

$$\sigma(0) = \frac{\alpha c - \lambda}{\alpha c}. \quad (5.31)$$

Como o prémio c , considerando uma carga ρ e o princípio do valor esperado, vem dado pela expressão $\lambda(1 + \rho)/\alpha$, teremos

$$\sigma(0) = \frac{\rho}{1 + \rho}, \quad (5.32)$$

pelo que

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} e^{-\frac{\rho}{1 + \rho} u}, \quad (5.33)$$

expressão amplamente conhecida para o modelo clássico.

Exemplo 5.3 Se os montantes das indenizações particulares têm distribuição $\Gamma(2, \alpha)$, então a função característica será

$$\omega(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - is} \right)^2,$$

pelo que podemos escrever (5.24) na forma

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ius} (\alpha - is)^2}{(\lambda + isc) (\alpha - is)^2 - \lambda\alpha^2} ds. \quad (5.34)$$

Afim de podermos comparar os resultados obtidos com resultados conhecidos, iremos particularizar, considerando $\alpha = 2$, $\lambda = 1$ e $c = 1.1$ ($\rho = 10\%$). Teremos assim, após simplificação,

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ius) \frac{10(-2.0 + 1.0is)^2}{(-4.0 + 34.0is + 11.0s^2)s} ds. \quad (5.35)$$

Verifica-se que o denominador da função integranda tem três raízes, uma das quais nula, que correspondem a três polos simples. As raízes diferentes de zero são neste caso

$$\begin{aligned} s_1 &= -.122\,502\,196i \\ s_2 &= -2.968\,406\,89i. \end{aligned}$$

A expressão para o cálculo dos resíduos será então

$$R(s) = \exp(-ius) \frac{10(-2.0 + 1.0is)^2}{68.0is + 33.0s^2 - 4.0},$$

e a soma dos mesmos virá

$$R(s_1) + R(s_2) = 9.19182958e^{-.122502196u} - .100920472e^{-2.96840689u}.$$

Uma vez que também neste caso os dois pontos singulares considerados estão situados no semi-plano complexo inferior, o valor do integral virá do produto daquela soma por $-2\pi i$. a substituição desse produto em (5.35) dá-nos de imediato a seguinte probabilidade de ruína

$$\psi(u) = .919182958e^{-.122\,502\,196u} - .0100920472e^{-2.968\,406\,89u}. \quad (5.36)$$

Exemplo 5.4 Se os montantes das indenizações particulares têm distribuição $\Gamma(3, \alpha)$, então a função característica será

$$\omega(s) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - is} \right)^3,$$

pelo que, após simplificação, de (5.24) obtemos

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-ius)(\alpha - is)^3}{(\lambda + ics)(\alpha - is)^3 - \lambda\alpha^3} ds. \quad (5.37)$$

Particularizando para por exemplo $\alpha = 3$, $\lambda = 1$ e $\rho = 10\%$ os pontos singulares da função integranda, com exceção da origem, serão:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1.380\,721\,7 - 3.976\,181\,3i \\ s_2 &= -.138\,546\,43i \\ s_3 &= -1.380\,721\,7 - 3.976\,181\,3i. \end{aligned}$$

Após cálculo, os resíduos correspondentes são

$$\begin{aligned} R_1 &= (5.355\,454\,8 \times 10^{-2} - 7.569\,174\,8 \times 10^{-2}i) \exp((-3.976\,181\,3 - 1.380\,721\,7i)u) \\ R_2 &= 9.242\,293i \exp(-.138\,546\,43u) \\ R_3 &= (-5.355\,454\,8 \times 10^{-2} - 7.569\,174\,8 \times 10^{-2}i) \exp((-3.976\,181\,3 + 1.380\,721\,7i)u) \end{aligned}$$

Multiplicando a soma dos resíduos por $c\sigma(0)i$ e simplificando obtemos a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \psi(u) &= .9242293e^{-.13854643u} \\ &\quad - e^{-3.976\,181\,3u} [.0107\,109\,1 \sin(1.3807217u) + .0151\,383\,5 \cos(1.3807217u)] . \end{aligned} \quad (5.38)$$

Exemplo 5.5 Se os montantes das indenizações particulares têm distribuição exponencial mista com densidade dada pela relação

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k b_k e^{-b_k x} \text{ com } a_k \text{ e } b_k \text{ não negativos e em que } \sum_{k=1}^n a_k = 1,$$

teremos como função característica

$$\omega(s) = \sum_{k=1}^n a_k \frac{b_k}{b_k - is},$$

pelo que a expressão (5.24) se escreverá neste caso na forma

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ius}}{\lambda + isc - \lambda \sum_{k=1}^n a_k \frac{b_k}{b_k - is}} ds. \quad (5.39)$$

Simplificando a função integranda, obtém-se no denominador um polinómio de grau $n+1$, cujas raízes, com excepção da raiz nula, serão os pontos singulares a considerar para avaliação dos resíduos e que podem ser consideradas no campo complexo como as contrapartidas da equação de Lundberg para o coeficiente de ajustamento. Se, em particular, considerarmos a densidade

$$f(x) = .6e^{-3x} + 2e^{-4x} + 2.1e^{-7x}, \quad (5.40)$$

a função característica correspondente será

$$\omega(s) = .2 \frac{3}{3 - is} + .5 \frac{4}{4 - is} + .3 \frac{7}{7 - is}. \quad (5.41)$$

Fixando $\lambda = 2$ e $c = 1$ e substituindo (5.41) na relação (5.39) teremos

$$\psi(u) = \frac{c\sigma(0)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ius} 5i(-7 + is)(-4 + is) \frac{-3 + is}{(223 - 212is - 60s^2 + 5is^3)s} ds. \quad (5.42)$$

Os pontos singulares da função integranda, excepto zero, serão então

$$\begin{aligned} s_1 &= -6.598\,909\,45i \\ s_2 &= -3.431\,470\,89i \\ s_3 &= -1.969\,619\,66i \end{aligned}$$

Calculando os resíduos naqueles pontos, somando-os e multiplicando o produto por $c\sigma(0)i$, obtemos, após simplificação,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= 2.058\,568\,55 \times 10^{-2} \exp(-6.598\,909\,45u) \\ &\quad + 2.925\,211\,87 \times 10^{-2} \exp(-3.431\,470\,89u) + .419\,209\,815 \exp(-1.969\,619\,66u). \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.4 A distribuição do tempo de ruína

Seguindo de perto o artigo de (Gerber & Shiu 1998), no qual estes autores determinam a dupla transformada de Laplace para o tempo de ruína, iremos desenvolver nesta secção uma dedução mais simples para aquela transformada, bem como para a dupla transformada de Laplace da probabilidade de sobrevivência, após o que procederemos à sua inversão algébrica, obtendo fórmulas explícitas para a probabilidade de ruína em tempo finito, para distribuições particulares das indemnizações individuais, com especial destaque para a distribuição exponencial, para a distribuição de Erlang e mistura de distribuições exponenciais. Aqueles autores tomam como ponto de partida a função $\phi(u)$ definida por

$$\phi(u) = E \left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \mid U(0) = u \right], \quad (5.44)$$

na qual $I(\cdot)$ denota a função indicatriz, isto é, sendo A um determinado acontecimento, $I(A) = 1$, se A é verdadeiro e será zero, caso contrário. Segundo os autores referidos, δ representa em princípio um parâmetro não negativo, pelo que $\phi(u)$ se pode considerar a transformada de Laplace correspondente à função densidade do tempo de ruína T , partindo de uma reserva inicial $U(0) = u$.

Não devemos perder de vista que $\phi(u)$ depende de δ e que para $\delta = 0$, teremos $\phi(u) = \psi(u)$. Notamos ainda que $\phi(u)$ se pode escrever na forma

$$\phi(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \frac{\partial}{\partial t} \psi(u, t) dt. \quad (5.45)$$

5.4.1 A transformada de Laplace da função ϕ

Considerando o primeiro sinistro, que supomos ocorrer no instante t com montante x , ou ocorre ruína nesse instante, acontecimento que tem probabilidade $[1 - F(u + ct)]$, ou ela ocorrerá posteriormente, dependendo então da nova reserva $u + ct - x$. Condicionando por t , podemos escrever a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \phi(u \mid t) &= [1 - F(u + ct)] e^{-\delta t} + \int_0^{u+ct} f(x) E \left[e^{-\delta(t+V)} I(V < \infty) \mid u + ct - x \right] dx \\ &= [1 - F(u + ct)] e^{-\delta t} + e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x) E \left[e^{-\delta V} I(V < \infty) \mid u + ct - x \right] dx, \end{aligned}$$

expressão na qual V representa o novo tempo de ruína (posterior a t). Como por definição

$$E \left[e^{-\delta V} I(V < \infty) \mid u + ct - x \right] = \phi(u + ct - x),$$

calculando o valor esperado de $\phi(u \mid t)$ obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_0^\infty g(t) [1 - F(u + ct)] e^{-\delta t} dt \\ &\quad + \int_0^\infty g(t) e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f(x) \phi(u + ct - x) dx dt, \end{aligned} \quad (5.46)$$

na qual $g(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$ é a função densidade do tempo inter-ocorrências consecutivas. Mudando a variável de integração t para a variável s através da relação $s = u + ct$, obtemos

$$\begin{aligned} \phi(u) &= c^{-1} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] e^{-\delta \frac{s-u}{c}} ds \\ &\quad + c^{-1} \int_u^\infty g\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta \frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \phi(s-x) dx ds. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Derivando a expressão anterior em ordem a u teremos

$$\begin{aligned} c\phi'(u) &= -g(0) [1 - F(u)] - g(0) \int_0^u f(x) \phi(u-x) dx \\ &\quad - c^{-1} \int_u^\infty g'\left(\frac{s-u}{c}\right) [1 - F(s)] e^{-\delta \frac{s-u}{c}} ds \\ &\quad - c^{-1} \int_u^\infty g'\left(\frac{s-u}{c}\right) e^{-\delta \frac{s-u}{c}} \int_0^s f(x) \phi(s-x) dx ds + \delta \phi(u). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Uma vez que $g'(t) = -\lambda g(t)$, a expressão anterior simplifica-se dando origem a

$$c\phi'(u) = (\lambda + \delta) \phi(u) - \lambda [1 - F(u)] - \lambda \int_0^u f(x) \phi(u-x) dx. \quad (5.49)$$

Para $\delta = 0$ obtém-se o resultado clássico da teoria da ruína

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \psi(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u f(x) \psi(u-x) dx - \frac{\lambda}{c} [1 - F(u)]. \quad (5.50)$$

Considerando agora a transformada de Laplace dos dois membros da igualdade (5.49) e atendendo às propriedades 4,5 e 7 deste tipo de transformadas, obtemos após simplificação,

$$c [s\tilde{\phi}(s) - \phi(0)] = (\lambda + \delta) \tilde{\phi}(s) + \frac{\lambda}{s} [\tilde{f}(s) - 1] - \lambda \tilde{f}(s) \tilde{\phi}(s), \quad (5.51)$$

expressão que nos permite isolar a dupla transformada $\tilde{\phi}(s)$:

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{c\phi(0) + \frac{\lambda}{s} [\tilde{f}(s) - 1]}{cs - \lambda - \delta + \lambda \tilde{f}(s)}. \quad (5.52)$$

Dever-se-á notar que o denominador de (5.52) é a diferença entre os dois lados da equação fundamental de Lundberg, tal como esta foi designada por (Gerber & Shiu 1998), escrita na forma

$$\lambda + \delta - cs = \lambda \tilde{f}(s). \quad (5.53)$$

Seguindo aqueles autores, podemos verificar que a equação anterior tem uma raiz não negativa $\rho = \rho(\delta)$, a qual é nula para $\delta = 0$ e que, para um vasto conjunto de distribuições das indemnizações individuais, o qual inclui as famílias exponencial e gama e para o qual o coeficiente de ajustamento existe, possui ainda uma raiz negativa $R = R(\delta)$. Devemos assinalar que, devido ao facto de a função geradora de momentos ser um caso particular da transformada de Laplace da função densidade, para o que basta considerar $r = -s$ como um número real,

a equação 5.53 tem para $\delta = 0$ pelo menos uma raiz real à esquerda da origem que, em valor absoluto, é o coeficiente de ajustamento. Daí a escolha do símbolo R para a representar.

Considerando em (5.52) $s = \rho$, o denominador anula-se, pelo que ρ deverá ser também uma raiz do numerador. Assim, é possível exprimir $\phi(0)$ em função de ρ , através da igualdade

$$\phi(0) = \frac{\lambda [1 - \tilde{f}(\rho)]}{c\rho}. \quad (5.54)$$

Substituindo (5.54) em (5.52) teremos então,

$$\tilde{\phi}(s) = \frac{\frac{\lambda}{s} [\tilde{f}(s) - 1] - \frac{\lambda}{\rho} [\tilde{f}(\rho) - 1]}{cs - \lambda - \delta + \lambda \tilde{f}(s)}. \quad (5.55)$$

A expressão anterior que, na realidade, mais não é que a dupla transformada correspondente ao tempo de ruína, (com efeito, $\tilde{\phi}(s)$ é a transformada de Laplace de $\phi(u)$, a qual por sua vez já era a transformada de Laplace do tempo de ruína considerando u fixo), não é facilmente invertível, até porque δ aparece apenas explicitamente no denominador, enquanto no numerador está implícito através de ρ . Por essa razão, diremos que (5.55) é uma transformada implícita de Laplace.

A primeira inversão, relativamente a s (a contrapartida de u no campo complexo) é simples e, quer a fórmula de inversão das transformadas de Laplace, quer o teorema dos resíduos, resolvem a questão sem problemas de maior.

A segunda inversão, relativamente a δ (a contrapartida de t no campo complexo) e que nos daria a densidade do tempo de ruína é mais difícil, uma vez que se trata de uma variável implícita e que $\rho(\delta)$ é uma função não analítica, como se verá através dos exemplos que adiante serão desenvolvidos para a probabilidade de ruína, mas que em tudo são idênticos a esta possível inversão.

5.4.2 A transformada de Laplace de $\sigma(u, t)$

Se considerarmos a densidade não própria $p(t)$ implícita na expressão (5.44) podemos escrever

$$\sigma(u, t) = 1 - \psi(u, t) = 1 - \int_0^t p(v)dv, \quad (5.56)$$

pelo que, considerando a transformada da unidade e a propriedade 5 das transformadas de Laplace, a dupla transformada de $\sigma(u, t)$ virá dada pela relação

$$\tilde{\sigma}(\delta, s) = \frac{1}{\delta s} - \frac{\tilde{\phi}(s)}{\delta}. \quad (5.57)$$

A substituição de (5.52) em (5.57) dará, após simplificação,

$$\tilde{\sigma}(\delta, s) = -\frac{-cs + \delta + cs\phi(0)}{s\delta (cs - \lambda - \delta + \lambda \tilde{f}(s))}. \quad (5.58)$$

Considerando idênticos argumentos aos utilizados para a expressão (5.54) da última secção obtemos

$$\phi(0) = 1 - \frac{\delta}{c\rho}. \quad (5.59)$$

A substituição de (5.59) em (5.58) conduz então a

$$\tilde{\sigma}(\delta, s) = \frac{s - \rho}{\rho s \left(cs - \lambda - \delta + \lambda \tilde{f}(s) \right)}, \quad (5.60)$$

expressão de facto obtida por (Gerber & Shiu 1998), partindo todavia de uma abordagem diferente.

5.4.3 A inversão complexa de $\tilde{\sigma}(\delta, s)$

A inversão de $\tilde{\sigma}(\delta, s)$, dado tratar-se de uma dupla transformada, tem de ser efectuada em duas etapas. A primeira, pela sua simplicidade, deverá ser feita em relação à variável s (contrapartida de u no campo complexo), uma vez que, ao contrário de δ , s aparece explicitamente na fórmula (5.60). A aplicação do teorema de inversão para transformadas de Laplace não oferece dificuldades de maior, como se verá nos exemplos que seguem. Todavia, a inversão relativamente a δ é bem mais complicada pois δ , para além de aparecer explicitamente na fórmula (5.60), aparece também implicitamente através de ρ , como anteriormente referimos, e após a primeira inversão, também implicitamente através das outras raízes da equação fundamental de Lundberg. Constata-se igualmente que não adianta tentar exprimir ρ , R e outras raízes em função de δ , uma vez que as expressões resultantes aparecem sob a forma de radicais, cujas propriedades em termos analíticos são conhecidas, impedindo na prática a determinação das singularidades existentes.

Pelas razões apontadas, concluímos que a única forma de proceder à segunda inversão seria por substituição da variável de inversão δ por uma das raízes da equação de Lundberg, ajustando a função integranda a essa substituição e exprimindo nessa nova variável as restantes raízes em presença. Notamos que a fórmula de inversão tem subjacente o cálculo de um integral no campo complexo, pelo que a substituição da variável de integração implica o ajustamento referido.

Pensamos que os três exemplos que seguem ajudam a compreender melhor a complexidade do problema, se bem que, em cada um, se traduzam por dificuldades substancialmente diferentes.

Exemplo 5.6 - *Indemnizações particulares com distribuição exponencial* - se as indemnizações particulares têm distribuição exponencial de valor médio $1/\alpha$, teremos

$$\tilde{f}(s) = \frac{\alpha}{\alpha + s}, \quad (5.61)$$

e por (5.60) teremos

$$\tilde{\sigma}(\delta, s) = \frac{(-\rho + s)(\alpha + s)}{\rho s (-\delta\alpha - \delta s - \lambda s + cs\alpha + cs^2)}. \quad (5.62)$$

A inversão de $\tilde{\sigma}(\delta, s)$ em relação a s (contrapartida de u no campo complexo) é relativamente simples, como anteriormente se afirmou, e a transformada de Laplace $\varphi(u, \delta)$ de $\sigma(u, t)$ em

relação a t , pode ser obtida pela fórmula de inversão complexa para este tipo de transformadas. Teremos assim, pelo teorema 3.2,

$$\varphi(u, \delta) = \sum (\text{resíduos de } e^{us} \tilde{\sigma}(\delta, s) \text{ em cada uma das suas singularidades em } \mathbb{C}), \quad (5.63)$$

Podemos verificar que a função integranda implícita em (5.63) é analítica em relação à variável s , com excepção dos polos $s = 0$ e $s = R$. Note-se que $s = \rho$ é uma singularidade amovível, uma vez que é raiz simples tanto do denominador como do numerador. Os resíduos podem então ser calculados pela igualdade

$$r(s) = e^{us} \frac{(-\rho + s)(\alpha + s)}{-\rho\delta\alpha - 2\rho\delta s - 2\rho\lambda s + 2\rho cs\alpha + 3\rho cs^2}, \quad (5.64)$$

cujos denominadores correspondem à derivada do denominador de (5.62) em ordem a s . Somando os dois resíduos temos então,

$$\varphi(u, \delta) = \frac{1}{\delta} + e^{uR} \frac{(-\rho + R)(\alpha + R)}{-\rho\delta\alpha - 2\rho\delta R - 2\rho\lambda R + 2\rho cR\alpha + 3\rho cR^2}. \quad (5.65)$$

A segunda e última inversão, em relação a δ (a contrapartida de t no campo complexo) não é tão simples, considerando até alguns autores, como Thorin (1977) por exemplo, que a mesma somente pode ser efectuada numericamente. Verifica-se com efeito que aquela inversão, se tentada directamente, implica a integração da função

$$e^{\delta t} \varphi(u, \delta) = e^{\delta t} \frac{1}{\delta} + e^{\delta t + uR} \frac{(-\rho + R)(\alpha + R)}{-\rho\delta\alpha - 2\rho\delta R - 2\rho\lambda R + 2\rho cR\alpha + 3\rho cR^2}, \quad (5.66)$$

no campo complexo e que, enquanto a inversa da primeira parcela é simplesmente 1, na segunda parcela, ao substituirmos R e ρ pelas suas expressões em função de δ , isto é

$$R = \frac{1}{2c} \left(\delta + \lambda - c\alpha - \sqrt{(\delta^2 + 2\delta\lambda + 2c\delta\alpha + \lambda^2 - 2\lambda c\alpha + c^2\alpha^2)} \right), \quad (5.67)$$

e

$$\rho = \frac{1}{2c} \left(\delta + \lambda - c\alpha + \sqrt{(\delta^2 + 2\delta\lambda + 2c\delta\alpha + \lambda^2 - 2\lambda c\alpha + c^2\alpha^2)} \right), \quad (5.68)$$

obtemos uma função não analítica em qualquer semiplano complexo (ver Anexo I), devido à existência de raízes quadradas numa expressão que além de complexa é bastante complicada e que, de facto, não é algebricamente invertível.

Porém, a questão pode ser resolvida considerando a mudança da variável de integração δ através da sua relação natural com R , i.e.,

$$\delta = R \frac{-\lambda + c\alpha + cR}{\alpha + R}. \quad (5.69)$$

A nova função integranda, para a segunda parcela de (5.66), após multiplicação por $d\delta/dR$ e simplificação, vem dada pela expressão

$$- \exp \left(R \frac{-t\lambda + tc\alpha + tcR + u\alpha + uR}{\alpha + R} \right) \frac{-\lambda\alpha + c\alpha^2 + 2c\alpha R + cR^2}{\alpha(-\lambda + c\alpha + cR)R}. \quad (5.70)$$

Nesta expressão ρ foi substituído por $-R - (-\delta - \lambda + c\alpha)/c$ (valor obtido através da sua relação natural com R na equação fundamental de Lundberg).

Pode-se verificar que a nova função integranda é analítica, com excepção dos pontos singulares $\{0\}$, $\{-R_1\}$ e $\{-\alpha\}$, os quais obedecem às desigualdades

$$-\alpha < -R_1 < 0, \quad (5.71)$$

e nas quais R_1 é o coeficiente de ajustamento. Como anteriormente referimos, na equação fundamental de Lundberg ao usar a transformada de Laplace em vez da função geradora de momentos, o coeficiente de ajustamento aparece precedido do sinal menos.

Verifica-se com facilidade que as duas primeiras singularidades são polos simples, mas que $\{-\alpha\}$ é uma singularidade essencial. Deve notar-se ainda que, quando na equação fundamental de Lundberg δ varia de 0 a $+\infty$, R decresce desde $-R_1$ até $-\alpha$. Porém, $\{-R_1\}$ não pode ser considerado como uma verdadeira singularidade pois na transformação de variáveis efectuada, é um valor que corresponde a $\delta = 0$ e, para este valor, o integral que define $\phi(u)$ converge. Por esse facto, $\{-\alpha\}$ constitui forçosamente a única singularidade a ter em consideração para avaliação dos resíduos.

O argumento acima exposto pode ser verificado. Com efeito, se na segunda parcela da expressão (5.66) efectuarmos as substituições acima mencionadas de δ e de ρ , sem multiplicar pela derivada $d\delta/dR$, obtemos uma função $\varphi_1(\delta, R)$ dada pela igualdade

$$\begin{aligned} \varphi_1(\delta, R) = & -\alpha(-\lambda + c\alpha + cR) R \frac{-\lambda\alpha + c\alpha^2 + 2Rc\alpha + cR^2}{(\alpha + R)^2 c} \\ & \times \exp\left(R \frac{-t\lambda + tc\alpha + tcR + u\alpha + uR}{\alpha + R}\right), \end{aligned}$$

a qual é analítica excepto para a singularidade $R = -\alpha$, de onde se conclui que os outros polos provêm da derivada, cujo único papel é o ajustamento da função integranda para efeitos da integração propriamente dita. Para além disso, poderíamos verificar ainda que, a consideração de outros resíduos, conduziria a resultados absurdos em termos de probabilidades de sobrevivência.

A avaliação do resíduo no ponto $\{-\alpha\}$ implica o desenvolvimento da função integranda em série de Laurent em torno daquele ponto, pelo que a série deverá ser desenvolvida em potências de $(R + \alpha)$. Como se sabe (ver Anexo I), o resíduo virá dado pelo coeficiente do monómio $(R + \alpha)^{-1}$ naquela série. A fim de simplificar o desenvolvimento, vamos efectuar a mudança de variável R através da relação $R = z - \alpha$, na expressão (5.70), da qual resulta

$$\frac{\lambda\alpha - cz^2}{\alpha(\lambda - cz)(-z + \alpha)} \exp\left((-z + \alpha) \frac{t\lambda - tcz - uz}{z}\right). \quad (5.72)$$

Simplificando a expressão anterior através de fracções parciais e isolando em factores separados as exponenciais que contêm a variável z , obtemos

$$\frac{1}{\alpha} e^{-(t\lambda + u\alpha + tc\alpha)} \left(-1 + \frac{\lambda}{\lambda - cz} + \frac{\alpha}{-z + \alpha}\right) e^{(u+tc)z} e^{\left(\frac{1}{z}\alpha t\lambda\right)}, \quad (5.73)$$

expressão a partir da qual é possível efectuar separadamente desenvolvimentos em potências de z . Com efeito, considerando que

$$\frac{\lambda}{\lambda - cz} = 1 + \frac{c}{\lambda}z + \frac{c^2}{\lambda^2}z^2 + \frac{c^3}{\lambda^3}z^3 + \dots, \quad (5.74)$$

$$\frac{\alpha}{-z + \alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha}z + \frac{1}{\alpha^2}z^2 + \frac{1}{\alpha^3}z^3 + \dots, \quad (5.75)$$

$$e^{(u+tc)z} = 1 + (u+tc)z + \frac{(u+tc)^2}{2!}z^2 + \frac{(u+tc)^3}{3!}z^3 + \dots, \quad (5.76)$$

$$e^{\frac{1}{z}\alpha t \lambda} = 1 + \alpha t \lambda z^{-1} + \frac{(\alpha t \lambda)^2}{2!}z^{-2} + \frac{(\alpha t \lambda)^3}{3!}z^{-3} + \dots, \quad (5.77)$$

podemos efectuar os produtos destas séries de acordo com a expressão (5.73) e isolar o coeficiente de z^{-1} no resultado final. A título de exemplo, o produto das duas últimas exponenciais daria

$$e^{(u+tc)z} e^{\left(\frac{1}{z}\alpha t \lambda\right)} = 1 + z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^{k+1} (\lambda \alpha t)^k}{k! (k+1)!} + \dots + z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda \alpha t)^{k+1}}{k! (k+1)!} + \dots \quad (5.78)$$

Após simplificação e atendendo a que a transformada inversa de $1/\delta$ é a unidade, obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma(u, t) = & 1 + \frac{e^{-[(\lambda+c\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda \alpha t)^{k+1}}{k! (k+1)!} \\ & - \frac{e^{-[(\lambda+c\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{c}{\lambda}\right)^j + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^j \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda \alpha t)^{j+k+1}}{k! (j+k+1)!}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

A expressão anterior pode ser simplificada usando a notação de Barnes para funções hipergeométricas generalizadas (ver Anexo III), obtendo-se

$$\begin{aligned} \sigma(u, t) = & 1 + \frac{e^{-[(\lambda+c\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha} \{ \lambda \alpha t \text{ hypergeom}(\emptyset, [2], (u+ct) \lambda \alpha t) \\ & - \sum_{j=0}^{\infty} \left[\left(\frac{c}{\lambda}\right)^j + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^j \right] \frac{\lambda^{j+1} \alpha^{j+1} t^{j+1}}{\Gamma(2+j)} \text{ hypergeom}(\emptyset, [2+j], (u+ct) \lambda \alpha t) \}, \end{aligned} \quad (5.80)$$

expressão na qual o primeiro parâmetro (\emptyset) das funções hipergeométricas consideradas não existe.

A fórmula anterior acelera significativamente os cálculos necessários, caso aquelas funções se encontrem pré-programadas no software utilizado.

Exemplo 5.7 - Indemnizações particulares com distribuição de Erlang - se as indemnizações particulares tiverem distribuição $\Gamma(2, \alpha)$, por exemplo, cuja transformada de Laplace $\omega(s)$ tem a forma

$$\omega(s) = \frac{\alpha^2}{(\alpha+s)^2}, \quad \text{Re}(s) > -\alpha, \quad (5.81)$$

a equação fundamental de Lundberg escrever-se-á

$$\delta + \lambda - cs = \lambda \frac{\alpha^2}{(\alpha+s)^2}. \quad (5.82)$$

Se, por exemplo, $\alpha = 2$, $c = 1.5$, $\lambda = 1$ e $\delta = 3$ o gráfico correspondente será,

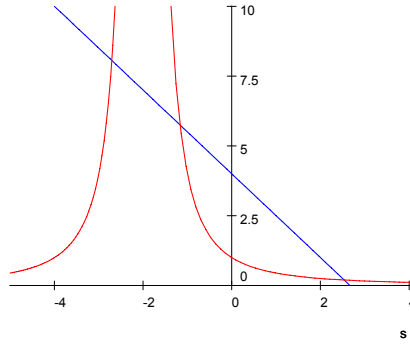


Figura 4

A equação (5.82) tem três raízes reais: Q , R , e ρ , todas função de δ , respeitando as desigualdades

$$Q < -\alpha < R < 0 \leq \rho. \quad (5.83)$$

Note-se contudo que a raiz Q não pertence ao domínio da transformada e que $\rho = 0$ se e somente se $\delta = 0$. Substituindo (5.82) em (5.60) obtém-se

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\delta, s) &= \frac{\rho - s}{\rho s (\lambda (1 - \omega(s)) + \delta - cs)} \\ &= \frac{(\rho - s)(\alpha + s)^2}{\rho s (2\lambda\alpha s + \lambda s^2 + \delta\alpha^2 + 2\delta\alpha s + \delta s^2 - cs\alpha^2 - 2cs^2\alpha - cs^3)}. \end{aligned} \quad (5.84)$$

A primeira inversão de (5.84) em relação a s (a contrapartida de u no plano complexo), conduz-nos à transformada de Laplace $\varphi(u, \delta)$ de $\sigma(u, t)$ em relação a t e pode ser obtida através da fórmula de inversão (5.63), já anteriormente utilizada para a distribuição exponencial. Podemos verificar que a função implícita definida pela relação (5.84) é analítica, em relação à variável s , excepto para as singularidades $s = 0$ e $s = R$. A singularidade $s = Q$ não tem de ser considerada pois, como atrás referimos, Q está fora do domínio da transformada e consequentemente do domínio de todas as funções em que ela entre. Notamos de novo que $s = \rho$ é uma singularidade amovível.

Atendendo a que as singularidades assinaladas são polos simples, os resíduos correspondentes à nova função integranda, deverão então ser avaliados pela expressão

$$r(s) = e^{us} \frac{(\rho - s)(\alpha + s)^2}{4\rho\lambda\alpha s + 3\rho\lambda s^2 + \rho\delta\alpha^2 + 4\rho\delta\alpha s + 3\rho\delta s^2 - 2\rho cs\alpha^2 - 6\rho cs^2\alpha - 4\rho cs^3}, \quad (5.85)$$

pelo que, após a sua soma, $\varphi(u, \delta)$ vem dada pela igualdade

$$\varphi(u, \delta) = \frac{1}{\delta} + e^{uR} \frac{(\rho - R)(\alpha + R)^2}{\rho(4\lambda\alpha R + 3\lambda R^2 + \delta\alpha^2 + 4\delta\alpha R + 3\delta R^2 - 2cR\alpha^2 - 6cR^2\alpha - 4cR^3)}. \quad (5.86)$$

A inversão de (5.86), como veremos, é bem mais difícil daquela que efectuámos no exemplo anterior.

A nova função integranda $e^{\delta t}\varphi(u, \delta)$ pode ser escrita na forma

$$e^{\delta t} \frac{1}{\delta} + e^{\delta t + uR} \frac{(\rho - R)(\alpha + R)^2}{\rho(4\lambda\alpha R + 3\lambda R^2 + \delta\alpha^2 + 4\delta\alpha R + 3\delta R^2 - 2cR\alpha^2 - 6cR^2\alpha - 4cR^3)}. \quad (5.87)$$

O integral da primeira parcela de (5.87) é simplesmente 1. Quanto à segunda, para começar, devemos assinalar que, quando a variável de integração δ varia de 0 a $+\infty$, R decresce desde o simétrico do coeficiente de ajustamento até $-\alpha$. Consideremos então a parcela

$$e^{\delta t + uR} \frac{(\rho - R)(\alpha + R)^2}{\rho(4\lambda\alpha R + 3\lambda R^2 + \delta\alpha^2 + 4\delta\alpha R + 3\delta R^2 - 2cR\alpha^2 - 6cR^2\alpha - 4cR^3)}. \quad (5.88)$$

Para podermos integrar a expressão anterior vamos efectuar uma mudança de variável, substituindo δ através da sua relação natural com R , dada pela equação fundamental de Lundberg, ou seja,

$$\delta = -\lambda + cR + \lambda \frac{\alpha^2}{(\alpha + R)^2}, \quad (5.89)$$

e multiplicar o resultado pela derivada de δ em relação a R . Após simplificação obtém-se

$$\begin{aligned} & -\exp\left(-R \frac{2t\lambda\alpha + t\lambda R - t\alpha^2 - 2tcR\alpha - tcR^2 - u\alpha^2 - 2u\alpha R - uR^2}{(\alpha + R)^2}\right) \frac{1}{R} \\ & + \exp\left(-R \frac{2t\lambda\alpha + t\lambda R - t\alpha^2 - 2tcR\alpha - tcR^2 - u\alpha^2 - 2u\alpha R - uR^2}{(\alpha + R)^2}\right) \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Considerando idênticos argumentos aos utilizados para a distribuição exponencial, verifica-se novamente que $-\alpha$ constitui a única singularidade a considerar. Os resíduos correspondentes a cada uma das parcelas da expressão anterior têm de ser calculados separadamente. Consideremos então a primeira parcela de (5.90) e a sua expansão em série de Laurent em potências de $(R + \alpha)$. Para o efeito, vamos substituir R por $z - \alpha$, obtendo

$$\begin{aligned} & \exp\left(-t\lambda - t\alpha - u\alpha + ztc + zu + \frac{1}{z^2}t\lambda\alpha^2\right) \frac{1}{-z + \alpha} \\ & = \exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \left\{ \exp[(u + ct)z] \exp[(t\lambda\alpha^2)z^{-2}] \frac{1}{-z + \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Como se pode verificar, cada um dos três últimos factores pode ser expandido em série de potências de z . Multiplicando as séries assim obtidas, termo a termo, e pondo em evidência o

coeficiente de z^{-1} obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2j-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-1} b^{k+j-1}}{(2k-1)! (k+j-1)!} \\ & + \exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-2} b^{k+j-1}}{(2k-2)! (k+j-1)!}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

na qual se considerou por simplicidade de escrita $a = u + ct$ e $b = t\lambda\alpha^2$. Utilizando a função hipergeométrica generalizada e simplificando, a expressão anterior reduz-se a

$$\exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b^j}{j!} \left\{ \begin{array}{l} \alpha^{-2j+1} a^2 \text{hypergeom} \left(\emptyset, \left[\frac{3}{2}, 1+j \right], \frac{1}{4} a^2 b \right) \\ + \alpha^{-2j} \text{hypergeom} \left(\emptyset, \left[\frac{1}{2}, 1+j \right], \frac{1}{4} a^2 b \right) \end{array} \right\}. \quad (5.93)$$

Para integrar a segunda parcela de (5.90) torna-se necessário exprimir $1/\rho$ em função de R . Escrevendo a equação fundamental de Lundberg (do terceiro grau) na forma

$$s^3 + \left(2\alpha - \frac{1}{c}\delta - \frac{1}{c}\lambda\right) s^2 + \left(\alpha^2 - \frac{2}{c}\alpha\delta - \frac{2}{c}\alpha\lambda\right) s - \frac{1}{c}\alpha^2\delta = s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

e considerando que a soma das três raízes é $-a_1$ e que o seu produto é $-a_3$, teremos,

$$\rho = -a_1 - R - R_1 = -a_1 - R + \frac{a_3}{\rho R} = -a_1 - (z - \alpha) + \frac{a_3}{\rho(z - \alpha)}.$$

Considerando que δ expresso na variável z tem a forma

$$\delta = -\frac{\lambda z^2 - cz^3 + cz^2\alpha - \lambda\alpha^2}{z^2},$$

teremos

$$\rho = -\left(-\lambda\alpha^2 - \alpha\rho\lambda + cz^2\alpha - \lambda\alpha z + 2pcz^2\right) \frac{\alpha}{\rho cz^2},$$

ou,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\rho cz^2}{-\alpha(-\lambda\alpha^2 - \alpha\rho\lambda + cz^2\alpha - \lambda\alpha z + 2pcz^2)}. \quad (5.94)$$

Esta equação possui duas raízes, embora se verifique algebricamente que apenas uma delas representa ρ , a qual conduz à seguinte relação:

$$h(z) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2(cz^2 - \lambda z - \alpha\lambda)} \times \frac{-2cz^2 + \alpha\lambda - \sqrt{(\alpha^2\lambda^2 + 4cz^3\lambda)}}{\alpha}. \quad (5.95)$$

Desenvolvendo $h(z)$ em série de Mac-Laurin, podemos escrever

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

expressão na qual os coeficientes c_k são naturalmente

$$c_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^{(k)}}{dz} h(z) \right]_{z=0}.$$

Considerando agora a segunda parcela de (5.90), teremos

$$\exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \left\{ \exp[(u + ct)z] \exp(t\lambda\alpha^2) z^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \right\}. \quad (5.96)$$

Desenvolvendo as duas últimas exponenciais da expressão anterior em potências de z , efetuando o produto das três séries termo a termo e pondo em evidência o coeficiente de z^{-1} obtém-se, após alguma álgebra,

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{(2j-2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-1} b^{k+j-1}}{(2k-1)!(k+j-1)!} + \sum_{j=1}^{\infty} c_{(2j-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2k-2} b^{k+j-1}}{(2k-2)!(k+j-1)!},$$

expressão na qual, como anteriormente, se considerou $a = u + ct$ e $b = t\lambda\alpha^2$.

Finalmente, para esta componente do resíduo, obtemos após simplificação,

$$\exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{c_{(2j-2)} ab^j}{\Gamma(1+j)} \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{3}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4}a^2b) + \frac{c_{(2j-1)} b^j}{\Gamma(1+j)} \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{1}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4}a^2b) \right\}. \quad (5.97)$$

Juntando as diversas componentes, a probabilidade de sobrevivência vem dada pela igualdade

$$\sigma(u, t) = 1 - \exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{b^j}{\Gamma(1+j)} \left\{ \alpha^{-2j+1} a^2 \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{3}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4}a^2b) + \alpha^{-2j} \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{1}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4}a^2b) \right\} + \frac{c_{(2j-2)} ab^j}{\Gamma(1+j)} \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{3}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4}a^2b) + \frac{c_{(2j-1)} b^j}{\Gamma(1+j)} \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{1}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4}a^2b) \right\}$$

A igualdade anterior pode ainda simplificar-se e a substituição de a por $u + ct$ e b por $t\lambda\alpha^2$, dará

$$\sigma(u, t) = 1 - \exp(-t\lambda - t\alpha - u\alpha) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(t\lambda\alpha^2)^j}{\Gamma(1+j)} \times \left\{ \begin{aligned} &(\alpha^{-2j+1} (u + ct)^2 + c_{(2j-2)} (u + ct)) \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{3}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4} (u + ct)^2 t\lambda\alpha^2) \\ &+ (\alpha^{-2j} + c_{(2j-1)}) \text{hypergeom}(\emptyset, [\tfrac{1}{2}, 1+j], \tfrac{1}{4} (u + ct)^2 t\lambda\alpha^2) \end{aligned} \right\}. \quad (5.98)$$

Exemplo 5.8 - Indemnizações particulares “mistura de exponenciais” - se os valores das indemnizações particulares têm uma distribuição correspondente à mistura de duas distribuições exponenciais, a transformada de Laplace escrever-se-á na forma

$$\omega(s) = b \frac{\alpha}{\alpha + s} + (1 - b) \frac{\beta}{\beta + s}. \quad (5.99)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $\beta > \alpha$, a transformada só está definida para $s > -\alpha$ (a maior das abcissas de convergência - ver propriedade 5 para as transformadas de Laplace). Afim de ver o aspecto gráfico correspondente à equação de Lundberg, vamos fixar os seguintes valores: $\delta = .5$, $\lambda = 1$, $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$, $c = 1.1$ e $b = 1/3$. A transformada de Laplace será então,

$$\omega(s) = \frac{2 + 3s}{(1 + 2s)(2 + s)},$$

e o gráfico correspondente à equação de Lundberg

$$\delta + \lambda - cs = \lambda \omega(s),$$

tem o seguinte aspecto:

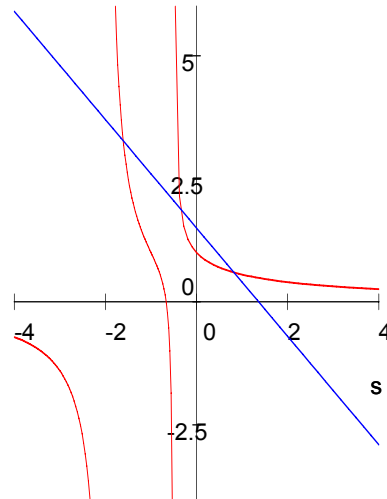


Figura 5

A substituição de $\omega(s)$ em (5.60) dará origem, após simplificação, à igualdade

$$\tilde{\sigma}(s, \delta) = \frac{-(\rho - s)(\alpha + s)(\beta + s)}{h(s)}, \quad (5.100)$$

expressão na qual

$$h(s) = \rho s (cs^3 + (-\lambda - \delta + c\alpha + c\beta)s^2 + (-\delta\alpha + \lambda b\alpha - \lambda\beta b - \lambda\alpha - \delta\beta + c\beta\alpha)s - \delta\beta\alpha). \quad (5.101)$$

Torna-se evidente que $h(s)$ tem uma raiz nula e, como se pode verificar pelo exemplo gráfico anterior, tem mais três raízes, Q , R e ρ , todas elas função de δ respeitando as desigualdades

$$Q < -\beta < -\alpha < R < 0 \leq \rho. \quad (5.102)$$

Deve ainda assinalar-se que, quando δ varia de zero a infinito, ρ varia também de zero a infinito e R varia decrescendo, desde o simétrico do Coeficiente de Ajustamento até $-\alpha$. Também neste caso a raiz Q está fora do domínio de existência de $\omega(s)$ e consequentemente de $\tilde{\sigma}(s, \delta)$, pelo que, para efeitos de inversão, não deve ser considerada.

A primeira inversão de (5.100) em relação a s (a contrapartida de u no plano complexo), conduz-nos à transformada de Laplace $\varphi(u, \delta)$ de $\sigma(u, t)$ em relação a t e pode ser obtida através da fórmula de inversão (5.63), já anteriormente utilizada para as distribuições exponencial e gama. Podemos verificar que a função implícita definida pela relação (5.100) é analítica, em relação à variável s , excepto para as singularidades $s = 0$ e $s = R$. Note-se que, mais uma vez, $s = \rho$ é uma singularidade amovível.

Atendendo a que as singularidades assinaladas são polos simples, os resíduos correspondentes à nova função integranda, deverão então ser avaliados pela expressão

$$r(s) = \frac{-(\rho - s)(\alpha + s)(\beta + s)}{h'(s)}, \quad (5.103)$$

pelo que, por aplicação da fórmula de inversão complexa teremos:

$$\varphi(u, \delta) = \frac{1}{\delta} + e^{uR} r(R).$$

A inversão desta última transformada é mais complicada, como se verá e, em princípio, resultará do cálculo do integral relativamente a δ da função

$$e^{\delta t} \varphi(u, \delta) = \frac{e^{\delta t}}{\delta} + e^{\delta t + uR} r(R), \quad (5.104)$$

em contorno apropriado (segundo o teorema de inversão, bastará avaliar o integral no intervalo $(\sigma_0 - i\infty, \sigma_0 + i\infty)$, no qual $\sigma_0 > -\alpha$ representa um qualquer valor real superior à abcissa de convergência (ver corolário 3.2.1).

A inversão da primeira parcela de (5.104) dá simplesmente 1, mas a inversão da segunda parcela, $\exp(\delta t + uR)r(R)$, é bem mais complexa. Com efeito, como é possível mas não desejável exprimir R em função de δ , dado que a função resultante não seria analítica, vemo-nos forçados a efectuar a mudança de variável

$$\delta = -\lambda + cR + \lambda\omega(R).$$

Assim, após multiplicação pela derivada de δ relativamente a R e simplificando, obtém-se para a parcela $\exp(\delta t + uR)r(R)\delta'(R)$ a expressão

$$\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R}\right) \times \exp \left[R \frac{-t\lambda\alpha - tR\lambda + tc\beta\alpha + tRc\alpha + tRc\beta + tcR^2 + t\lambda b\alpha - t\lambda\beta b + u\beta\alpha + uR\alpha + uR\beta + uR^2}{(\alpha + R)(\beta + R)} \right].$$

Tal como nos exemplos anteriores, as únicas singularidades a considerar são as implícitas na parte exponencial da função integranda, as quais, como se verifica, são neste caso duas singularidades essenciais, uma correspondente a $R = -\alpha$ e outra que resulta de $R = -\beta$. Como a ordem não interessa, consideremos em primeiro lugar $R = -\alpha$ e a parcela

$$-\frac{1}{R} \times \exp \left[R \frac{-t\lambda\alpha - tR\lambda + tc\beta\alpha + tRc\alpha + tRc\beta + tcR^2 + t\lambda b\alpha - t\lambda\beta b + u\beta\alpha + uR\alpha + uR\beta + uR^2}{(\alpha + R)(\beta + R)} \right].$$

Efectuando na expressão anterior a substituição de R por $z - \alpha$, obtemos

$$-\frac{1}{z - \alpha} \exp \left[(z - \alpha) \frac{-t\lambda z - tc\alpha z + tc\beta z + tcz^2 + t\lambda b\alpha - t\lambda\beta b - u\alpha z + u\beta z + uz^2}{z(\beta + z - \alpha)} \right],$$

ou, desenvolvendo o expoente em fracções simples e separando as respectivas exponenciais, obtém-se

$$-\frac{1}{z - \alpha} \exp(-t\lambda - tc\alpha - u\alpha) \exp[(ct + u)z] \exp\left(t\lambda b \frac{\alpha}{z}\right) \exp\left(-\beta t\lambda \frac{-1 + b}{\beta + z - \alpha}\right).$$

Para calcular o resíduo correspondente a esta parcela, basta agora desenvolver a expressão anterior em série de Laurent em torno do ponto $z = 0$. Para o efeito, desenvolvem-se as exponenciais que contêm aquela variável em série de Mac-Laurin e efectua-se o produto das séries termo a termo, isolando nesse produto o coeficiente de z^{-1} . Teremos assim,

$$\begin{aligned} \frac{-1}{z - \alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k z^k, \\ e^{(ct+u)z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ct+u)^k}{k!} z^k, \\ e^{t\lambda b \frac{\alpha}{z}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\lambda b\alpha)^k}{k!} z^{-k} e \\ e^{-\beta t\lambda \frac{-1+b}{\beta+z-\alpha}} &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \end{aligned}$$

Deve notar-se que a última exponencial não tem um desenvolvimento algébrico tão simples quanto as demais, sendo no entanto sempre possível a obtenção dos coeficientes c_k através das sucessivas derivadas, isto é, pela relação

$$c_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dz^k} \exp\left(-\beta t\lambda \frac{-1+b}{\beta+z-\alpha}\right) \right]_{z=0}.$$

Efectuando o produto das séries, o coeficiente de z^{-1} vem dado pela expressão

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(t\lambda b\alpha)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!},$$

pelo que a primeira componente do resíduo correspondente à raiz α será:

$$\exp(-t\lambda - tc\alpha - u\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\lambda b\alpha)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!}. \quad (5.105)$$

Para obter a segunda componente, correspondente à parcela que contém $1/\rho$, teremos de exprimir este cociente em função de R e de seguida como um produto de potências de z . Para o efeito começamos por escrever a equação fundamental de Lundberg na forma

$$\begin{aligned} 0 &= s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 \\ &= s^3 - \frac{\lambda + \delta - c\alpha - c\beta}{c} s^2 - \frac{\delta\alpha - \lambda b\alpha + \lambda\beta b + \lambda\alpha + \delta\beta - c\alpha\beta}{c} s - \delta\alpha \frac{\beta}{c}. \end{aligned}$$

Considerando que a soma das três raízes é $-a_1$ e que o seu produto é $-a_3$, teremos

$$\rho = -a_1 - R - R_1 = -a_1 - (z - \alpha) + \frac{a_3}{\rho(z - \alpha)},$$

ou seja,

$$\rho = \frac{\lambda + \delta - c\alpha - c\beta}{c} - (z - \alpha) - \frac{\delta\beta\alpha}{c\rho(z - \alpha)}. \quad (5.106)$$

Exprimindo agora δ em função de z através da relação

$$\begin{aligned} \delta &= -\lambda + c(z - \alpha) + \lambda\omega(z - \alpha) \\ &= (z - \alpha) \frac{-\lambda z - cz\alpha + cz\beta + cz^2 + \lambda b\alpha - \lambda\beta b}{z(\beta + z - \alpha)}, \end{aligned}$$

substituindo em (5.106) e considerando $\rho = 1/x$, obtém-se uma equação do segundo grau em x na forma

$$b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0,$$

equação na qual

$$\begin{aligned} b_0 &= \beta\alpha cz^2 + (-\beta\alpha^2 c + \beta^2\alpha c - \beta\alpha\lambda)z + \beta\alpha^2\lambda b - \beta^2\alpha\lambda b \\ b_1 &= (c\beta + c\alpha)z^2 + (c\beta^2 - \lambda\beta + \lambda\beta b - c\alpha^2 - \lambda b\alpha)z + \lambda b\alpha^2 - \alpha\lambda\beta b \\ b_2 &= -cz\alpha + cz\beta + cz^2. \end{aligned}$$

Das duas raízes da equação anterior só uma representa $1/\rho$ e a sua escolha deve recair naquela que anule x para $z = 0$, dado que sabemos que para $R = -\alpha$, temos $\rho = \infty$. Recorrendo aos valores correspondentes ao gráfico apresentado, teríamos

$$x(z) = \frac{-105z + 10 - 110z^2 - \sqrt{(5481z^2 + 3180z + 6908z^3 + 100 + 4356z^4)}}{2(-20 + 44z^2 + 26z)}, \quad (5.107)$$

exemplo que será continuado com mais detalhe no capítulo 6. Desenvolvendo $x(z)$ em série de Mac-Laurin, teremos

$$x(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \text{ com } d_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dz^k} x(z) \right]_{z=0},$$

e, tal como para a primeira parte do resíduo, efectuando o produto das quatro séries e isolando o coeficiente de z^{-1} , obtém-se uma expressão em tudo análoga à anterior, apenas com as modificações resultantes da troca das séries correspondentes a $1/R$ e $1/\rho$ respectivamente. Chega-se assim, após simplificação, à expressão

$$\exp(-t\lambda - tc\alpha - u\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=1}^{\infty} d_{k-1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\lambda b\alpha)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!}. \quad (5.108)$$

Juntando as duas componentes, obtém-se finalmente o valor do resíduo correspondente à raiz α , ou seja,

$$\exp(-t\lambda - tc\alpha - u\alpha) \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^k + d_{k-1} \right] \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\lambda b\alpha)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!}. \quad (5.109)$$

Para o resíduo correspondente à raiz β , basta seguir os mesmos passos, vindo a expressão final do mesmo dada por

$$\exp(-t\lambda - tc\beta - u\beta) \sum_{j=0}^{\infty} e_j \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\beta} \right)^k + f_{k-1} \right] \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\lambda(1-b)\beta)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!}, \quad (5.110)$$

expressão na qual os coeficientes $\{e_k\}$ resultam do desenvolvimento em série de Mac-Laurin de

$$e^{\alpha t \lambda \frac{b}{\alpha+z-\beta}} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k z^k,$$

e os coeficientes $\{f_k\}$ do desenvolvimento de $1/\rho$ em potências de z . Juntando os três resíduos temos finalmente,

$$\begin{aligned} \sigma(u, t) = & 1 - e^{-t\lambda - tc\alpha - u\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} c_j \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^k + d_{k-1} \right] \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\lambda b\alpha)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!} \\ & - e^{-t\lambda - tc\beta - u\beta} \sum_{j=0}^{\infty} e_j \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\beta} \right)^k + f_{k-1} \right] \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(t\lambda(1-b)\beta)^{j+k+l-1}}{(j+k+l-1)!} \times \frac{(ct+u)^{l-1}}{(l-1)!}. \end{aligned} \quad (5.111)$$

Notamos que, tal como nos exemplos anteriores, os somatórios em l podem ser calculados por recurso à função hipergeométrica generalizada de Barnes.

5.5 Uma alternativa assintótica à equação de Seal

No modelo clássico de risco, dado ter por base um processo composto estacionário e de incrementos independentes, o comportamento do processo após um dado sinistro, é em tudo semelhante ao comportamento original, isto é, aparte a reserva inicial, o comportamento da sinistralidade face aos prémios recebidos num dado intervalo de tempo, posterior a um dado sinistro ou ao instante inicial, é rigorosamente semelhante. Essa semelhança é naturalmente extensível aos incrementos da perca agregada máxima, pelo que, se conhecessemos a distribuição do número de incrementos num dado intervalo de tempo e a distribuição do montante de cada incremento, poderíamos determinar a distribuição da perca agregada máxima nesse intervalo, a partir da qual o cálculo de probabilidades de ruína ou sobrevivência em horizonte finito se tornaria imediato.

Seja $G(\tau) = \psi(0, \tau)$ a probabilidade de ruína no intervalo $(0, \tau]$. Se designarmos por V a variável aleatória que representa o tempo que decorre desde o último incremento, ou desde o instante inicial, até ao próximo incremento da perca agregada máxima, verifica-se que

$$P(V \leq \tau) = \psi(0, \tau) = G(\tau),$$

pelo que, por definição, $G(\tau)$ é uma função de distribuição. Trata-se todavia de uma distribuição não própria, já que $G(\infty) = \psi(0, \infty) = \psi(0) < 1$, o que significa que a probabilidade de não haver qualquer incremento da perca agregada máxima é positiva.

Consideremos a variável aleatória $M(t)$, a qual representa o número de vezes que a perca agregada máxima é incrementada no intervalo $(0, t]$. Seja $p_k(t) = P[M(t) = k]$ a respectiva função de probabilidade. Teremos então,

$$p_0(t) = P[M(t) = 0] = G(t),$$

$$p_1(t) = G(t) - \int_0^t G'(\tau) G(t - \tau) d\tau = G(t) - G^{2*}(t),$$

e, naturalmente,

$$p_k(t) = G^{k*}(t) - G^{(k+1)*}(t).$$

Consideremos agora a variável aleatória

$$Y(t) = \sum_{k=0}^{M(t)} R_k, \quad (5.112)$$

em que $R_0 = 0$ e $\{R_k\}_{k=1,2,\dots}$ constitui uma sequência de variáveis aleatórias correspondentes aos sucessivos incrementos da perca agregada máxima naquele intervalo.

Se as variáveis aleatórias $R_k, k = 1, 2, \dots$ fossem *iid* e independentes de $M(t)$, $Y(t)$ teria distribuição composta com função de distribuição

$$F_{Y(t)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) F_{R_1}^{k*}(x).$$

Porém, como qualquer incremento R_k depende do prémio encaixado e este do tempo decorrido, torna-se óbvio que ao fixarmos um limite superior t para o intervalo de possíveis ocorrências, estamos a criar uma dependência que em horizonte infinito não existia.

Com efeito, em horizonte infinito, (ver teorema 1.5), qualquer incremento tem distribuição

$$H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy.$$

Por outro lado, quando $t \rightarrow 0$, a distribuição de um incremento, caso ele se dê, tende para $F(x)$, uma vez que o prémio encaixado tende para zero com t . Concluimos assim que a distribuição de um dado incremento depende do limite superior do intervalo considerado, tal como aliás o número de incrementos. Por essa razão, não se pode considerar $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ como um processo de renovamento composto, já que não existe independência entre as variáveis aleatórias consideradas no somatório da expressão 5.112.

Contudo, pelo menos para valores de t suficientemente elevados, a probabilidade de sobrevivência pode ser aproximada pela fórmula

$$\sigma(u, t) = P[Y(t) < u] \simeq \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) H^{k*}(u), \quad (5.113)$$

na qual $H^{k*}(u)$ representa a probabilidade da soma de k incrementos, quando independentes e com distribuição comum $H(x)$, não exceder u . Notando de novo que quando t se aproxima da origem, a distribuição de um qualquer incremento anterior a t tende para a distribuição do montante de um sinistro individual, podemos igualmente concluir que a distribuição de um incremento constitui uma espécie de interpolação entre $H(x)$ e $F(x)$.

Notamos que no caso da distribuição dos montantes das indemnizações particulares ser exponencial, o cálculo obtido a partir da expressão (5.113) é exacto. Neste caso,

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x},$$

pelo que

$$H(x) = \alpha \int_0^x e^{-\alpha y} dy = F(x),$$

e a “interpolação” acima referida torna-se invariante.

No capítulo seguinte daremos exemplos de aplicação prática da fórmula (5.113), comparando os resultados obtidos com os valores considerados exactos, bem como com os valores calculados pela fórmula de Seal.

5.6 Ruína eventual no modelo de Erlang $(2, \beta)$

Consideremos um processo de risco de renovamento no qual o tempo inter-sinistros tem distribuição $\Gamma(2, \beta)$. Partindo da equação de renovamento que relaciona a probabilidade de sobrevivência ao primeiro sinistro com a subsequente probabilidade de não ruína, teremos,

$$\sigma(u) = \int_0^{\infty} g(t) \int_0^{u+ct} f(x) \sigma(u+ct-x) dx dt.$$

Torna-se relativamente simples mostrar que, (ver (Dickson 1998)), a transformada de Laplace de $\sigma(u)$ vem dada pela expressão

$$\tilde{\sigma}(s) = \frac{c^2 s \sigma(0) + \beta^2 \mu - 2\beta c}{c^2 s^2 - 2\beta c s + \beta^2 [1 - \tilde{f}(s)]}. \quad (5.114)$$

Uma vez conhecida a transformada de Laplace $\tilde{f}(s)$ da distribuição do montante das indemnizações particulares, não é difícil proceder à inversão algébrica de (5.114) como se verá nos exemplos seguintes, pelo menos para distribuições de tipo exponencial, combinações de exponenciais ou Erlang. Todavia, mesmo quando aquela expressão não existe, ou não se pode determinar, é sempre possível obter uma expressão idêntica para a transformada de Fourier, a partir da qual, a inversão numérica é possível. Ver-se-á no capítulo seguinte como se pode efectuar essa inversão.

Exemplo 5.9 *Indemnizações com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Considerando na expressão (5.114) $c = 1.1$, $\beta = 2$ e

$$\tilde{f}(s) = \left(\frac{2}{2+s} \right)^2,$$

exemplo igualmente desenvolvido em (Dickson 1998), teremos, após simplificação,

$$\tilde{\sigma}(s) = (121sd - 40) \frac{(2+s)^2}{s(-876s + 44s^2 + 121s^3 - 160)}, \quad (5.115)$$

expressão na qual $d = \sigma(0)$. Pela fórmula de inversão complexa virá então para $\sigma(u)$ a igualdade

$$\sigma(u) = \sum \{ \text{resíduos de } e^{us} \tilde{\sigma}(s) \}.$$

Verifica-se de imediato que os pontos singulares correspondentes à expressão anterior são as raízes do denominador de (5.115), ou seja,

$$\{s = 0\}, \{s = -.181818\}, \{s = -2.789240\} \text{ e } \{s = 2.607422\}.$$

Por outro lado, dado tratar-se de polos simples, a fórmula geral dos resíduos será

$$r(s) = e^{us} (121sd - 40) \frac{(2+s)^2}{-1752s + 132s^2 + 484s^3 - 160},$$

expressão cujo denominador é a derivada em ordem a s do denominador de (5.115) (consultar Anexo I). Teremos então,

$$\begin{aligned} r(0) &= 1, \\ r(-.181818) &= 2.0661157 \times 10^{-2} \exp(-.181818u) (-22d - 40), \\ r(-2.789240) &= -1.3116279 \times 10^{-4} \exp(-2.789240u) (-337.498086d - 40) \\ \text{e } r(2.607422) &= 4.470006 \times 10^{-3} \exp(2.607422u) (315.498086d - 40). \end{aligned} \quad (5.116)$$

É fácil concluir que o último resíduo tem de ser nulo, já que numa qualquer expressão, que represente uma probabilidade, não podem existir exponenciais de expoente positivo, que tenderiam para infinito com a própria variável independente. Teremos assim, necessariamente,

$$315.498086d - 40 = 0,$$

o que dará

$$d = \sigma(0) = .12678365.$$

Substituindo o valor de d em (5.116) obtemos finalmente,

$$\sigma(u) = 1 - .884075 \exp(-.181818u) + 1.085887 \times 10^{-2} \exp(-2.789240u).$$

Exemplo 5.10 *Indemnizações com distribuição mistura de exponenciais*

Tal como no exemplo anterior, consideremos $c = 1.1$ e $\beta = 2$. Seja

$$f(x) = b\alpha e^{-\alpha x} + (1-b)\gamma e^{-\gamma x} \quad (5.117)$$

a densidade do montante das indemnizações particulares, cuja transformada de Laplace é

$$\tilde{f}(s) = b\frac{\alpha}{\alpha + s} + (1-b)\frac{\gamma}{\gamma + s}.$$

Particularizando para $b = 1/3$, $\alpha = 1/2$ e $\gamma = 2$ e efectuando as necessárias substituições em (5.114) obtemos

$$\tilde{\sigma}(s) = (121sd - 40)(1 + 2s) \frac{2 + s}{s(-1158s - 275s^2 + 242s^3 - 80)}. \quad (5.118)$$

Para além da raiz nula, o denominador de (5.118) tem as raízes

$$\{s = -1.647048\}, \{s = -7.033204 \times 10^{-2}\} \text{ e } \{s = 2.853744\}.$$

Tratando-se igualmente de polos simples, a fórmula geral dos resíduos, para inversão de $\tilde{\sigma}(s)$, será

$$r(s) = e^{su} (121sd - 40)(1 + 2s) \frac{2 + s}{-2316s - 825s^2 + 968s^3 - 80},$$

pelo que

$$\begin{aligned} r(0) &= 1, \\ r(-1.647048) &= 2.862613 \times 10^{-4} \exp(-1.647048u) (-199.292856d - 40), \\ r(-7.033204 \times 10^{-2}) &= 2.11317 \times 10^{-2} \exp(-7.033204 \times 10^{-2}u) (-8.510177d - 40) \\ r(2.853744) &= 3.582026 \times 10^{-3} \exp(2.853744u) (345.303033d - 40). \end{aligned} \quad (5.119)$$

Como o último resíduo tem de ser nulo, teremos

$$d = .115840279934.$$

Considerando a soma dos resíduos obtém-se finalmente,

$$\sigma(u) = 1 - .018059 \exp(-1.647048u) - .866101 \exp(-7.033204 \times 10^{-2}u). \quad (5.120)$$

Capítulo 6

Cálculo prático de probabilidades de ruína

6.1 Introdução

Existe um vasto leque de artigos e autores que se têm debruçado sobre o cálculo exacto ou aproximado de probabilidades de ruína, quer para o modelo clássico quer para modelos mais gerais, dos quais os modelos de renascimento constituem um estimulante exemplo e desafio. Correndo o elevado risco de não citar muitos deles, parece-nos todavia dever salientar os resultados obtidos por Lundberg, Ammeter, Cramér, Seal, e mais recentemente, Asmussen, Grandell, Gerber, Dickson e Egídio Reis.

Apresentando-se a maioria das soluções para as probabilidades de ruína ou sobrevivência através de equações diferenciais ou integro-diferenciais de variado tipo, as transformadas explícitas ou implícitas de Fourier ou Laplace, constituem o caminho mais adequado, quicá por vezes o único, para se atingirem resultados concretos, sejam de tipo algébrico ou mesmo numérico. Contudo, ficam por resolver, em numerosos casos, os aspectos práticos da sua inversão, para obtenção dos resultados finais desejados.

Demos no capítulo anterior diversos exemplos de inversão algébrica de transformadas, tanto em horizonte infinito como finito, os quais conduzem a expressões exactas, cuja avaliação em termos numéricos se torna imediata para a maior parte das fórmulas apresentadas. Todavia, reconhecemos que, em diversos modelos e em numerosas situações, a obtenção de fórmulas finais exactas é difícil, quando não impossível, e depende em larga medida das distribuições dos tempos inter-sinistros bem como das distribuições dos montantes das indemnizações particulares consideradas. Importa pois salientar o papel da inversão numérica de transformadas, para a qual diversos algoritmos têm sido desenvolvidos e que se baseiam essencialmente no cálculo de integrais impróprios resultantes dos teoremas de inversão disponíveis.

A maioria dos integrais das fórmulas de inversão, dado estarem implicitamente definidos no campo complexo, acabam por conduzir sempre a funções integrandas que são, ou contêm, combinações diversas de funções circulares, cujo comportamento oscilatório, em intervalos por vezes de elevada dimensão, é por demais conhecido, levantando numerosos problemas de carácter numérico, para cuja solução procurámos respostas adequadas.

Neste capítulo, daremos alguns exemplos concretos de inversão, os quais, não constituindo o único caminho viável, pretendem acima de tudo mostrar que, o desenvolvimento de algo-

ritmos adequados de integração numérica, constitui um passo importante para a obtenção de resultados fiáveis a obter em tempo útil, através do recurso a qualquer computador pessoal.

Na secção 6.2 procedemos ao cálculo da probabilidade de ruína eventual para o modelo clássico. Os exemplos e tabelas numéricas apresentados comparam os valores obtidos pelas fórmulas algébricas exactas, deduzidas no capítulo anterior, com os valores obtidos para as mesmas probabilidades por (Lima et al. 2002), bem como com os valores obtidos por integração da transformada do coseno em múltiplos de $\pi/2$, utilizando o teorema 3.5.

Na secção 6.3 procedemos ao cálculo da probabilidade de ruína eventual para o modelo de Sparre Andersen. Tal como na secção anterior, os valores numéricos apresentados comparam os três algoritmos e as respectivas precisões relativas.

A secção 6.4 é dedicada à determinação das probabilidades de ruína ou sobrevivência em tempo finito para o modelo clássico. Os exemplos apresentados comparam os valores obtidos pelas fórmulas exactas, que deduzimos no capítulo anterior, com os valores obtidos por integração na fórmula de Seal e ainda com os valores da expressão assintótica apresentada na secção 5.5.

6.2 Probabilidade de ruína eventual no modelo clássico

Viu-se no parágrafo 5.2 que, através da perca agregada máxima, se podia deduzir a transformada de Fourier da derivada da probabilidade de sobrevivência (5.7) que aqui se reproduz.

$$\widehat{\sigma}'(s) = \frac{\sigma(0)}{1 + \psi(0) \frac{i[1-\widehat{f}(s)]}{\mu s}}. \quad (6.1)$$

Se na igualdade anterior substituirmos $\widehat{f}(s)$ pela sua expressão algébrica e se na expressão resultante separarmos a parte real $\sigma_r(s)$ de $\widehat{\sigma}'(s)$ teremos, por aplicação da fórmula de inversão (3.54),

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(su)}{s} \sigma_r(s) ds. \quad (6.2)$$

De forma idêntica, partindo da expressão (1.11), que aqui se reproduz,

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - F(x)] \sigma(u-x) dx, \quad (6.3)$$

e aplicando as propriedades da transformada de Fourier teremos,

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}(s) &= \frac{\sigma(0)}{is} + \frac{\lambda}{c} \mathcal{F}[1 - F(x)]_s \widehat{\sigma}(s) \\ &= \frac{\sigma(0)}{is} + \frac{\lambda}{c} \frac{-i[1 - \widehat{f}(s)]}{s} \widehat{\sigma}(s). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Da igualdade anterior conclui-se de imediato que

$$\widehat{\sigma}(s) = \frac{\sigma(0)}{is \left[1 + \frac{\lambda i}{cs} [1 - \widehat{f}(s)] \right]},$$

expressão que, pela propriedade 5 da transformada de uma derivada, conduz a

$$\widehat{\sigma}'(s) = \frac{\sigma(0)}{1 + \frac{\lambda i}{cs} [1 - \widehat{f}(s)]}. \quad (6.5)$$

A relação anterior terá de coincidir com a expressão (6.1) e da comparação entre as duas podemos concluir que de facto, $\psi(0)$ tem de ser igual a $1/(1 + \rho)$. A sua inversão far-se-á então pelo processo anteriormente indicado. Convém no entanto referir que, mesmo nos casos em que a transformada $\widehat{f}(s)$ não tem uma forma algébrica concisa, como no caso da distribuição de Pareto, por exemplo, é sempre possível recorrer ao cálculo da mesma nos pontos necessários através da expressão (3.28). Nos exemplos que seguem a coluna (1) apresenta os valores obtidos através das fórmulas algébricas exactas deduzidas no capítulo anterior, a coluna (2) mostra os resultados obtidos por (Lima et al. 2002) através da aproximação numérica por integração no intervalo $(0, \infty)$ da transformada do coseno e a coluna (3) a aproximação por integração em múltiplos de $\pi/2$ segundo as fórmulas de inversão deduzidas para o coseno (fórmulas (3.58) e (3.59) e as correspondentes fórmulas para o seno.

Exemplo 6.1 *Probabilidade de ruína eventual - indemnizações com distribuição exponencial*

Poisson(1)/Exponencial(1)
c = 1.1

u	(1)	(2)	(1) / (2)	(3)	(1) / (3)
0	0,90909091	0,90909091	1,00000000	0,90909091	1,00000000
1	0,83009156	0,83009181	0,99999970	0,83009152	1,00000004
2	0,75795720	0,75795747	0,99999964	0,75795716	1,00000005
3	0,69209126	0,69209137	0,99999984	0,69209125	1,00000002
4	0,63194903	0,63195359	0,99999278	0,63194901	1,00000002
5	0,57703311	0,57703304	1,00000011	0,57703310	1,00000001
6	0,52688934	0,52688921	1,00000025	0,52688933	1,00000003
7	0,48110304	0,48110285	1,00000040	0,48110303	1,00000001
8	0,43929553	0,43931411	0,99995771	0,43929551	1,00000005
9	0,40112106	0,40112076	1,00000074	0,40112105	1,00000004
10	0,36626393	0,36626358	1,00000095	0,36626391	1,00000004
20	0,14756419	0,14756432	0,99999914	0,14756418	1,00000005
30	0,05945218	0,05945100	1,00001989	0,05945218	1,00000010
40	0,02395271	0,02395488	0,99990925	0,02395271	0,99999993
50	0,00965031	0,00964827	1,00021226	0,00965031	1,00000060
60	0,00388802	0,00388582	1,00056456	0,00388801	1,00000138
70	0,00156645	0,00156355	1,00185308	0,00156644	1,00000192

Tabela 1

Da comparação entre os valores obtidos pelas fórmulas exactas, coluna (1), e os valores aproximados, colunas (2) e (3), ressalta de imediato a vantagem na utilização do algoritmo de integração em múltiplos de $\pi/2$, coluna (3).

Exemplo 6.2 *Probabilidade de ruína eventual - indemnizações com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Poisson(1)/Gama(2;2)
c = 1.1

u	(1)	(2)	(1) / (2)	(3)	(1) / (3)
0	0,90909091	0,90909091	1,00000000	0,90909091	1,00000000
1	0,81268622	0,81268625	0,99999997	0,81268619	1,00000004
2	0,71941886	0,71941866	1,00000029	0,71941884	1,00000003
3	0,63649493	0,63649518	0,99999960	0,63649491	1,00000003
4	0,56311072	0,56311072	1,00000001	0,56311071	1,00000003
5	0,49818635	0,49818674	0,99999920	0,49818633	1,00000003
6	0,44074744	0,44074761	0,99999962	0,44074744	1,00000000
7	0,38993100	0,38993154	0,99999862	0,38993100	1,00000002
8	0,34497350	0,34497124	1,00000655	0,34497349	1,00000004
9	0,30519943	0,30520002	0,99999807	0,30519941	1,00000004
10	0,27001114	0,27001164	0,99999817	0,27001113	1,00000005
20	0,07931611	0,07931737	0,99998413	0,07931610	1,00000008
30	0,02329921	0,02330117	0,99991575	0,02329920	1,00000012
40	0,00684417	0,00684680	0,99961615	0,00684417	0,99999961
50	0,00201048	0,00201385	0,99833016	0,00201048	1,00000217
60	0,00059058	0,00059467	0,99312628	0,00059058	1,00000508
70	0,00017348	0,00017829	0,97304789	0,00017348	1,00002381

Tabela 2

Tal como no exemplo anterior, verifica-se que os valores da coluna (3) constituem uma melhor aproximação aos valores obidos pelas fórmulas exactas.

6.3 Probabilidade de ruína eventual no modelo de Erlang $(2, \beta)$

Partindo da transformada de Laplace da probabilidade de não-ruína referida no capítulo anterior para este modelo, fórmula (5.114), que aqui se reproduz,

$$\tilde{\sigma}(s) = \frac{c^2 s \sigma(0) + \beta^2 \mu - 2\beta c}{c^2 s^2 - 2\beta c s + \beta^2 [1 - \tilde{f}(s)]},$$

podemos obter a transformada de Laplace de $\psi'(u) = -\sigma'(u)$, por aplicação da propriedade 4 para transformadas de derivadas, o que dará

$$\tilde{\psi}'(s) = \sigma(0) - s \frac{c^2 s \sigma(0) + \beta^2 \mu - 2\beta c}{c^2 s^2 - 2\beta c s + \beta^2 [1 - \tilde{f}(s)]}$$

Substituindo na igualdade anterior s por is , obtemos a transformada de Fourier correspondente, ou seja,

$$\widehat{\psi}'(s) = \sigma(0) - \frac{-c^2 s^2 \sigma(0) + is(\beta^2 \mu - 2\beta c)}{-c^2 s^2 - 2\beta c is + \beta^2 [1 - \widehat{f}(s)]}. \quad (6.6)$$

Devemos notar que não seria possível transformar directamente $\tilde{\sigma}(s)$, uma vez que $\sigma(u)$ tende para a unidade quando $u \rightarrow \infty$, facto que faz com que o integral não convirja para $s = 0$. Daí a passagem para a probabilidade de ruína eventual. Obtendo a partir de (6.6) a parte real de $\widehat{\psi}'(s)$, a probabilidade de ruína pode ser calculada por aplicação directa da expressão (3.54).

Exemplo 6.3 *Probabilidade de ruína eventual - indemnizações com distribuição exponencial*

Erlang(2)/Exponencial(1)
c = 1.1

u	(1)	(2)	(1) / (2)	(3)	(1) / (3)
0	0,88006436	0,88006436	1,00000000	0,88006436	1,00000000
1	0,78059731	0,78059737	0,99999992	0,78059728	1,00000004
2	0,69237227	0,69237239	0,99999983	0,69237224	1,00000003
3	0,61411864	0,61411882	0,99999971	0,61411862	1,00000002
4	0,54470943	0,54471763	0,99998493	0,54470941	1,00000002
5	0,48314502	0,48314532	0,99999938	0,48314501	1,00000002
6	0,42853877	0,42853913	0,99999917	0,42853876	1,00000002
7	0,38010426	0,38010467	0,99999890	0,38010425	1,00000002
8	0,33714393	0,33714845	0,99998661	0,33714393	1,00000002
9	0,29903909	0,29903962	0,99999821	0,29903908	1,00000002
10	0,26524095	0,26524155	0,99999776	0,26524094	1,00000002
20	0,07994047	0,07994186	0,99998266	0,07994047	1,00000007
30	0,02409311	0,02409485	0,99992764	0,02409311	1,00000010
40	0,00726138	0,00726455	0,99956281	0,00726137	1,00000052
50	0,00218849	0,00219145	0,99865070	0,00218849	1,00000122
60	0,00065959	0,00066315	0,99461911	0,00065958	1,00000333
70	0,00019879	0,00020293	0,97958752	0,00019879	1,00001062

Tabela 3

Tal como para o modelo clássico, também neste modelo a utilização do algoritmo de integração em múltiplos de $\pi/2$, reduz substancialmente o erro cometido, como se pode verificar por comparação dos resultados da coluna (3) com os valores obtidos pelas fórmulas exactas, coluna (1), muito especialmente para valores elevados da reserva inicial.

Exemplo 6.4 *Probabilidade de ruína eventual - indemnizações com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Erlang(2)/Gama(2;2)
c = 1.1

u	(1)	(2)	(1) / (2)	(3)	(1) / (3)
0	0,87321635	0,87321635	1,00000000	0,87321635	1,00000000
1	0,73643284	0,73643224	1,00000081	0,73643278	1,00000007
2	0,61451851	0,61451807	1,00000072	0,61451847	1,00000006
3	0,51238828	0,51238775	1,00000104	0,51238825	1,00000006
4	0,42720717	0,42720334	1,00000898	0,42720715	1,00000006
5	0,35618535	0,35618524	1,00000029	0,35618533	1,00000006
6	0,29697058	0,29697062	0,99999987	0,29697056	1,00000007
7	0,24760009	0,24760025	0,99999936	0,24760007	1,00000007
8	0,20643730	0,20642460	1,00006151	0,20643728	1,00000006
9	0,17211770	0,17211806	0,99999788	0,17211769	1,00000006
10	0,14350363	0,14350409	0,99999680	0,14350362	1,00000008
20	0,02329360	0,02329470	0,99995247	0,02329359	1,00000033
30	0,00378103	0,00378290	0,99950491	0,00378103	1,00000117
40	0,00061374	0,00061380	0,99990602	0,00061374	1,00000416
50	0,00009962	0,00010291	0,96806962	0,00009962	1,00005859
60	0,00001617	0,00002015	0,80245321	0,00001618	0,99960069
70	0,00000262	0,00000730	0,35973254	0,00000262	1,00083416

Tabela 4

Na tabela anterior, para além de se poder constatar que a coluna (3) apresenta resultados mais aproximados aos valores considerados exactos, verifica-se ainda que os mesmos apresentam uma bem maior regularidade no erro cometido, o qual, mesmo para valores relativamente elevados da reserva inicial, se mantém bastante reduzido.

6.4 Probabilidade de sobrevivência em tempo finito no modelo clássico

Esta secção tem por objectivo a comparação entre os valores que podemos considerar exactos, determinados a partir das fórmulas deduzidas no capítulo anterior por inversão algébrica da dupla transformada de Laplace, e os valores obtidos por utilização da fórmula de Seal, bem como a comparação entre aqueles e os resultantes da aproximação assintótica derivada a partir da perda agregada máxima. Na fórmula de Seal os integrais considerados foram aproximados através do integral dicotómico, descrito no Anexo II, considerando um erro por iteração de 10^{-8} . Os valores considerados exactos foram obtidos por programas específicos em linguagem Maple de que se apresentam alguns exemplos no Anexo IV. Nas tabelas que seguem, a coluna (1) refere-se aos cálculos efectuados pelas fórmulas exactas, enquanto a coluna (2) se refere à aproximação pela fórmula de Seal (tabelas 5, 7 e 9) ou à fórmula assintótica deduzida através da perda agregada máxima (tabelas 6 e 8). Para visualizar o valor do erro na aproximação assintótica para a distribuição gama, apresenta-se igualmente o gráfico da figura 6.

Exemplo 6.5 - *Probabilidade de sobrevivência - indemnizações particulares com distribuição exponencial*

Poisson(1) / Exponential(1)
c = 1.1

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,5365993	0,5365994	0,7619440	0,7619441	0,8802943	0,8802943	0,9996916	0,9996915
2	0,4071362	0,4071361	0,6454310	0,6454310	0,7943276	0,7943275	0,9986500	0,9986500
3	0,3447890	0,3447890	0,5740222	0,5740221	0,7315409	0,7315409	0,9067703	0,9967702
4	0,3066932	0,3066931	0,5247155	0,5247155	0,6835926	0,6835924	0,9941047	0,9941046
5	0,2804025	0,2804022	0,4881071	0,4881069	0,6455807	0,6455807	0,9907670	0,9907669
6	0,2608815	0,2608814	0,4595705	0,4595705	0,6145517	0,6145516	0,9868853	0,9868850
7	0,2456618	0,2456616	0,4365361	0,4365359	0,5886327	0,5886325	0,9825803	0,9825774
8	0,2333737	0,2333736	0,4174483	0,4174481	0,5665793	0,5665789	0,9779576	0,9779327
9	0,2231889	0,2231888	0,4013043	0,4013044	0,5475303	0,5475306	0,9731056	0,9730701
10	0,2145732	0,2145730	0,3874243	0,3874241	0,5308697	0,5308696	0,9680970	0,9680317

Tabela 5

Como se pode verificar, as diferenças entre os valores considerados exactos, coluna (1), e os valores aproximados pela fórmula de Seal, coluna (2), são neste caso bastante reduzidas, apesar das múltiplas integrações que aquela fórmula contém.

Exemplo 6.6 *Probabilidade de sobrevivência - indemnizações particulares com distribuição exponencial (aproximação assintótica)*

Valores para a Poisson (1)/Exp(1) e $c = 1.1$

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,5365993	0,5365993	0,7619440	0,7619435	0,8802943	0,8802940	0,9996916	0,9996916
2	0,4071362	0,4071362	0,6454310	0,6454307	0,7943276	0,7943274	0,9986500	0,9986501
3	0,3447890	0,3447890	0,5740222	0,5740219	0,7315409	0,7315407	0,9967703	0,9967704
4	0,3066932	0,3066932	0,5247155	0,5247153	0,6835926	0,6835924	0,9941047	0,9941048
5	0,2804025	0,2804025	0,4881071	0,4881069	0,6455807	0,6455806	0,9907670	0,9907672
6	0,2608815	0,2608815	0,4595705	0,4595704	0,6145517	0,6145515	0,9868853	0,9868855
7	0,2456618	0,2456618	0,4365361	0,4365359	0,5886327	0,5886325	0,9825803	0,9825805
8	0,2333737	0,2333737	0,4174483	0,4174482	0,5665793	0,5665791	0,9779576	0,9779578
9	0,2231889	0,2231889	0,4013043	0,4013041	0,5475303	0,5475302	0,9731056	0,9731058
10	0,2145732	0,2145732	0,3874243	0,3874242	0,5308697	0,5308697	0,9680970	0,9680972

Tabela 6

Como se pode verificar, as diferenças entre os valores considerados exactos e os valores obtidos pela fórmula assintótica (neste caso também considerados exactos), são mais reduzidas do que as existentes na tabela anterior, devido ao facto de os integrais da fórmula assintótica serem mais simples de avaliar que os da fórmula de Seal, apesar das múltiplas integrações também necessárias.

Exemplo 6.7 - *Probabilidade de sobrevivência - indenizações particulares com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Poisson(1) / Gama(2;2)
c = 1.1

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,4884085	0,4884083	0,7513234	0,7513236	0,8978161	0,8978162	0,9999823	0,9999823
2	0,3641062	0,3641061	0,6351154	0,6351155	0,8149902	0,8149903	0,9998333	0,9998333
3	0,3076573	0,3076571	0,5650207	0,5650206	0,7533220	0,7533220	0,9994071	0,9994071
4	0,2737618	0,2737614	0,5170447	0,5170447	0,7059408	0,7059408	0,9986105	0,9986105
5	0,2505766	0,2505764	0,4816262	0,4816261	0,6682891	0,6682891	0,9974103	0,9974102
6	0,2334582	0,2334580	0,4541301	0,4541299	0,6375256	0,6375256	0,9958156	0,9958154
7	0,2201653	0,2201649	0,4320059	0,4320056	0,6118227	0,6118225	0,9938597	0,9938582
8	0,2094663	0,2094659	0,4137200	0,4137198	0,5899563	0,5899561	0,9915875	0,9915706
9	0,2006211	0,2006206	0,3982882	0,3982881	0,5710756	0,5710756	0,9890468	0,9890290
10	0,1931546	0,1931540	0,3850462	0,3850461	0,5545703	0,5545703	0,9862840	0,9862459

Tabela 7

Embora com menor precisão daquela que obtivemos para a distribuição exponencial, a tabela anterior mostra ainda assim que a integração pela fórmula de Seal produz resultados bastante aproximados

Exemplo 6.8 - Probabilidade de sobrevivência - indemnizações particulares com distribuição $\Gamma(2, 2)$ (aproximação assintótica)

Valores para a Poisson (1)/Gama(2,2) e $c = 1.1$

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,4884085	0,4884085	0,7513234	0,7713882	0,8978161	0,9137333	0,9999823	0,9999939
2	0,3641062	0,3641062	0,6351154	0,6479706	0,8149902	0,8300949	0,9998333	0,9999229
3	0,3076573	0,3076573	0,5650207	0,5738162	0,7533220	0,7658370	0,9994071	0,9996736
4	0,2737618	0,2737618	0,5170447	0,5234896	0,7059408	0,7162122	0,9986105	0,9991378
5	0,2505766	0,2505766	0,4816262	0,4865913	0,6682891	0,6768190	0,9974103	0,9982481
6	0,2334582	0,2334582	0,4541301	0,4580986	0,6375256	0,6447172	0,9958156	0,9969810
7	0,2201653	0,2201653	0,4320059	0,4352675	0,6118227	0,6179739	0,9938597	0,9953459
8	0,2094663	0,2094663	0,4137200	0,4164595	0,5899563	0,5952853	0,9915875	0,9933721
9	0,2006211	0,2006211	0,3982887	0,4006295	0,5710758	0,5757441	0,9890468	0,9910992
10	0,1931477	0,1931477	0,3850498	0,3870633	0,5545716	0,5586841	0,9862840	0,9885679

Tabela 8

Como seria de esperar, os resultados obtidos pela fórmula assintótica diferem dos valores exactos, embora, como também esperávamos, a diferença não seja elevada e se vá atenuando à medida que t aumenta. O gráfico da figura 5, para o qual se considerou uma reserva inicial $U(0) = 2$, ilustra bem a natureza e comportamento da aproximação assintótica.

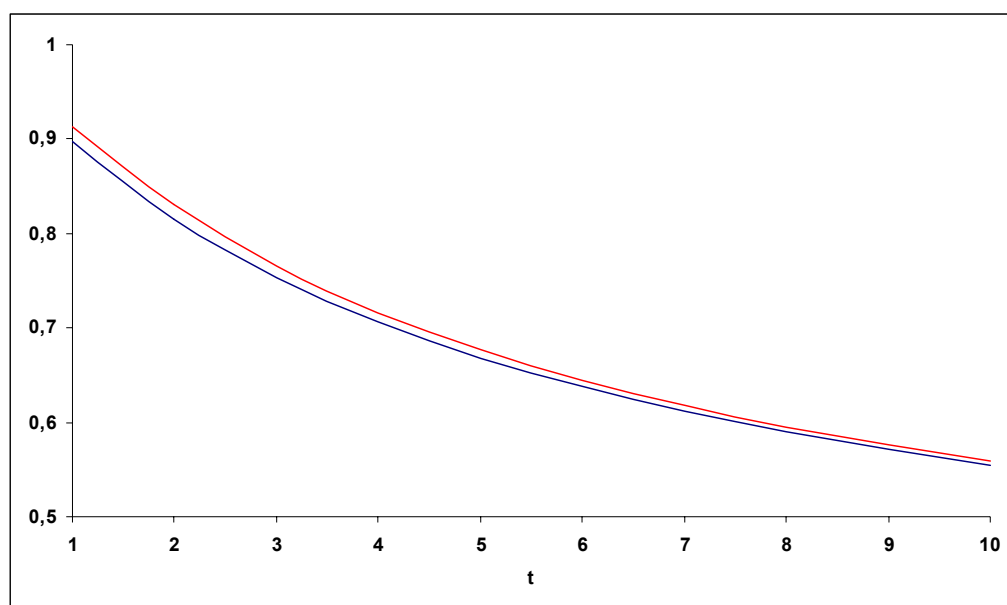


Figura 6

Exemplo 6.9 - *Probabilidade de sobrevivência - indemnizações particulares com distribuição combinação de exponenciais*

Poisson(1) / Combinação de Exponenciais de média 1
c = 1.1

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,5808459	0,5808459	0,7986258	0,7986259	0,8832519	0,8832520	0,9965719	0,9965719
2	0,4613693	0,4613693	0,6888200	0,6888201	0,7994853	0,7994854	0,9913266	0,9913266
3	0,3976509	0,3976509	0,6172846	0,6172846	0,7373643	0,7373643	0,9848518	0,9848517
4	0,3562979	0,3562979	0,5661029	0,5661030	0,6892756	0,6892756	0,9775631	0,9775625
5	0,3267453	0,3267453	0,5272508	0,5272508	0,6507489	0,6507484	0,9697607	0,9797420
6	0,3043222	0,3043222	0,4965127	0,4965132	0,6190425	0,6190417	0,9616615	0,9616539
7	0,2865857	0,2865857	0,4714373	0,4714368	0,5923864	0,5923853	0,9534211	0,9534167
8	0,2721181	0,2721181	0,4504924	0,4507775	0,5695864	0,5697266	0,9451512	0,9451518
9	0,2600340	0,2600340	0,4326665	0,4329839	0,5498062	0,5500083	0,9369309	0,9369279
10	0,2497496	0,2497496	0,4172624	0,4175560	0,5324411	0,5326497	0,9288161	0,9288266

Tabela 9

Algumas diferenças que se podem ver na tabela anterior, entre os valores considerados exactos e os valores determinados através da fórmula de Seal, dever-se-ão, em nosso entender, à maior complexidade de integração neste caso e, por uma questão de rapidez de cálculo, ao erro utilizado por iteração nos cálculos dos correspondentes integrais, o qual continuou a ser da ordem de 10^{-8} , facto que pode não garantir a fiabilidade julgada necessária.

Capítulo 7

Outras aproximações à probabilidade de ruína

7.1 Introdução

O presente capítulo, no qual não são utilizadas directamente transformadas, foi desenvolvido com o intuito de mostrar outras abordagens possíveis para a determinação de probabilidades de ruína, assim como para reflectir também, parte das investigações prosseguidas em torno de questões de análise numérica, sempre presentes quando se deseja calcular ou avaliar expressões onde apareçam desenvolvimentos em série ou integrais de funções com razoável complexidade. Importa referir ainda que, alguns dos algoritmos apresentados, cuja natureza podemos considerar mais do tipo mecânico do que de tipo algébrico, são de aplicação mais vasta daquela que é apresentada, até porque a sua génese está mais ligada às dependências funcionais existentes nas fórmulas resolventes, do que à natureza dos modelos que lhes deram origem. Ver-se-á na secção 7.4 um exemplo desse tipo no tratamento da probabilidade de ruína em tempo finito. Devemos salientar ainda que só é possível alcançar resultados fiáveis por meio deste tipo de algoritmos através de computadores e *software* adequados, sem os quais estas soluções seriam impensáveis à luz da álgebra e aritmética tradicionais.

Na secção 7.2 procedemos ao cálculo aproximado da probabilidade de não ruína em horizonte infinito para o modelo clássico, por meio de um algoritmo incremental, que tem por base a evolução da probabilidade de não ruína à medida que a reserva inicial vai aumentando.

Na secção 7.3 justificamos para o modelo clássico a aproximação $\psi(u) \approx \psi(0) \exp(-Ru)$, a qual é exacta para várias distribuições do tempo inter-sinistros e das indemnizações particulares.

Na secção 7.4 desenvolvemos um algoritmo algébrico recursivo para o cálculo da probabilidade de ruína em tempo finito, cuja aplicação depende, entre outros factores, da natureza das funções de distribuição em presença e dos meios computacionais disponíveis.

Na secção 7.5 procedemos ao desenvolvimento em série de Mac-Laurin de potências de t da probabilidade de sobrevivência $\sigma(u, t)$, aplicável a modelos de renovamento. A fórmula obtida permite o cálculo exacto daquela probabilidade, dependendo contudo os resultados e a precisão alcançada, entre outros factores, do número n de parcelas consideradas na soma de ordem n da série, o qual está largamente condicionado pelos meios computacionais disponíveis.

7.2 Aproximação por incrementos sucessivos

Pensamos que a abordagem seguidamente efectuada apresenta algum interesse de natureza prática, até porque a mesma nos parece poder ser aplicada a outros modelos para além do clássico.

No modelo clássico de risco, o conhecimento da probabilidade de não ruína para os pontos (reserva inicial) do intervalo $(0, u - \epsilon)$, desde que ϵ seja suficientemente reduzido, permite calcular uma boa aproximação para $\sigma(u)$.

Com efeito, partindo da igualdade

$$\sigma(u) = \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \sigma(x) [1 - F(u - x)] dx, \quad (7.1)$$

divida-se o intervalo $(0, u)$ em n partes iguais. Seja $d = u/n$ o diâmetro dessa decomposição. Consideremos que em cada subdivisão $\sigma(x)$ evolui linearmente. Teremos então para o intervalo $[(k-1)d, kd]$

$$\sigma(x) = \sigma[(k-1)d] + \frac{\sigma(kd) - \sigma[(k-1)d]}{d} [x - (k-1)d]. \quad (7.2)$$

Comecemos pelo primeiro intervalo, para o qual teremos então

$$\sigma(x) = \sigma(0) + \frac{\sigma(d) - \sigma(0)}{d} x. \quad (7.3)$$

Substituindo esta expressão em (7.1) obtemos

$$\sigma(d) = \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^d \left[\sigma(0) + \frac{\sigma(d) - \sigma(0)}{d} x \right] [1 - F(d - x)] dx.$$

Resolvendo esta equação em ordem a $\sigma(d)$ teremos

$$\sigma(d) = \frac{\sigma(0) \left(1 + \frac{\lambda}{c} b - \frac{\lambda}{c} a \right)}{1 - \frac{\lambda a}{cd}}, \quad (7.4)$$

igualdade na qual

$$\begin{aligned} a &= \int_0^d x [1 - F(x)] dx, \\ b &= \int_0^d [1 - F(x)] dx. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Generalizando, obteremos

$$\begin{aligned} \sigma(kd) &= \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{kd} \sigma(x) [1 - F(kd - x)] dx \\ &= \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{(k-1)d} \sigma(x) [1 - F(kd - x)] dx \\ &\quad + \frac{\lambda}{c} \int_{(k-1)d}^{kd} \sigma(x) [1 - F(kd - x)] dx, \end{aligned} \quad (7.6)$$

ou seja,

$$\sigma(kd) = I_{k-1} + \frac{\lambda}{c} \int_{(k-1)d}^{kd} \sigma(x) [1 - F(kd - x)] dx, \quad (7.7)$$

expressão na qual

$$I_{k-1} = \sigma(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^{(k-1)d} \sigma(x) [1 - F(kd - d - x)] dx. \quad (7.8)$$

Note-se que I_{k-1} pode ser calculado com boa aproximação, uma vez que $\sigma(x)$ já é conhecido, embora discretizado, até $(k-1)d$.

A expressão (7.7) é em tudo idêntica a (7.1), a qual serviu de base ao cálculo de $\sigma(d)$. Substituindo em (7.7) $\sigma(x)$ pela aproximação linear dada pela expressão (7.2) e resolvendo em ordem a $\sigma(kd)$ obtemos

$$\sigma(kd) = \frac{I_{k-1} + \frac{\lambda}{c} \sigma[(k-1)d] \left(b_k - \frac{a_k}{d}\right)}{1 - \frac{\lambda a_k}{cd}}. \quad (7.9)$$

Todavia,

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{(k-1)d}^{kd} [x - (k-1)d] [1 - F(kd - x)] dx, \\ b_k &= \int_{(k-1)d}^{kd} [1 - F(kd - x)] dx. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Por simples translação de variável constata-se de imediato que

$$\begin{aligned} a_k &= a, \\ b_k &= b, \end{aligned}$$

pelo que a igualdade 7.9 dará

$$\sigma(kd) = \frac{I_{k-1} + \frac{\lambda}{c} \sigma[(k-1)d] \left(b - \frac{a}{d}\right)}{1 - \frac{\lambda a}{cd}}. \quad (7.11)$$

Pode-se considerar demonstrado que quando o diâmetro da decomposição tende para zero, $\sigma(nd)$ tende para $\sigma(u)$.

Por exemplo, para indemnizações particulares com distribuição exponencial, considerando um diâmetro de decomposição $d = .01$, obtém-se $\sigma(u)$ para valores de u no intervalo $(0, 70)$ com sete casas decimais exactas.

Devemos notar que este tipo de algoritmo não é muito sensível ao formato da distribuição dos montantes das indemnizações individuais, desde que estas sejam variáveis aleatórias contínuas.

Embora o algoritmo apresentado seja basicamente aplicável em equações de renovamento, pensamos que o mesmo tipo de aproximação se pode revelar de grande interesse noutros modelos, como por exemplo quando se consideram taxas de juro, modelos aos quais não se aplicam com a mesma facilidade as transformadas de Laplace ou Fourier.

7.3 Uma aproximação rápida para a probabilidade de ruína eventual

A desigualdade de Lundberg tem servido na prática para um cálculo aproximado da probabilidade de ruína. Porém, é sabido que tratando-se de um ótimo majorante para reservas iniciais elevadas, se afasta significativamente de $\psi(u)$ à medida que a reserva inicial se aproxima da origem.

Sabe-se também que, para várias distribuições, para as quais existe o coeficiente de ajustamento, $\psi(u) \approx ke^{-Ru}$ - veja-se por exemplo a aproximação de Cramér-Lundberg. Trata-se todavia de um resultado assintótico que nem sempre garante boas aproximações junto à origem, excepto para determinadas distribuições particulares.

Vejamos porém o que se passa se utilizarmos a aproximação

$$\psi(u) \approx \psi(0)e^{-Ru}. \quad (7.12)$$

1. Para várias combinações de distribuições a expressão anterior é exacta. Veja-se por exemplo o teorema 2.2 e a extensão assinalada.
2. Numa vizinhança ε da origem a aproximação será sempre boa, uma vez que $\lim_{u \rightarrow 0} \psi(u) = \psi(0)$.
3. Analise-se agora o que se passa quando $u \rightarrow \infty$.

Pela equação de renovoamento (2.8) sabemos que

$$\sigma(u) = \int_0^\infty g(t) \int_0^{u+ct} \sigma(u+ct-x) f(x) dx dt. \quad (7.13)$$

Consideremos agora a relação

$$\begin{aligned} \sigma_1(u) &= \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty (1 - \psi(0)e^{-R(u+ct-x)}) f(x) dx dt \\ &= \int_0^\infty g(t) \int_0^{u+ct} (1 - \psi(0)e^{-R(u+ct-x)}) f(x) dx dt \\ &\quad + \int_0^\infty g(t) \int_{u+ct}^\infty (1 - \psi(0)e^{-R(u+ct-x)}) f(x) dx dt. \end{aligned} \quad (7.14)$$

A solução desta equação é justamente

$$\sigma_1(u) = 1 - \psi(0)e^{-Ru}, \quad (7.15)$$

na qual R é o coeficiente de ajustamento e que, relembramos, corresponde à primeira raiz positiva da equação

$$E(e^{-crT}) m_X(r) = m_T(-cr) m_X(r) = 1, \quad (7.16)$$

sendo $m_T(r)$ e $m_X(r)$ as funções geradoras de momentos do tempo inter-sinistros e do montante das indemnizações, respectivamente. Com efeito,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty (1 - \psi(0)e^{-R(u+ct-x)})f(x)dxdt \\
&= 1 - \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty \psi(0)e^{-R(u+ct-x)})f(x)dxdt \\
&= 1 - \psi(0)e^{-Ru} \int_0^\infty g(t)e^{-Rct} \int_0^\infty e^{Rx}f(x)dxdt \\
&= 1 - \psi(0)e^{-Ru}m_T(-Rc)m_X(R) \\
&= 1 - \psi(0)e^{-Ru}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Como porém a partir de um dado valor U_L , $f(x)$ se anula, pelo menos numericamente, o último integral da expressão (7.14) virá nulo para todo o $u > U_L$ pelo que, nesse caso,

$$1 - \psi(0)e^{-Ru} = \int_0^\infty g(t) \int_0^{u+ct} (1 - \psi(0)e^{-R(u+ct-x)})f(x)dxdt$$

Desta igualdade ressalta de imediato que para $u > U_L$

$$\sigma(u) = 1 - \psi(0)e^{-Ru} \tag{7.18}$$

Trata-se pois não só de uma solução assintótica, como de uma boa aproximação, pelo menos para valores de u suficientemente elevados. Como o último integral da expressão (7.14) é não negativo, verifica-se facilmente que

$$\lim_{u \rightarrow U_L} [1 - \psi(0)e^{-Ru}] = \sigma(u) \tag{7.19}$$

e que este limite é atingido por valores superiores. Assim, à esquerda de U_L ,

$$\psi(0)e^{-Ru} \leq \psi(u) \tag{7.20}$$

Esta interessante desigualdade verifica-se também para diversas distribuições junto à origem e, em vários casos, é válida para todos os valores da reserva inicial.

Por exemplo no modelo clássico temos

$$\sigma'(0) = \frac{\rho}{\mu(1 + \rho)^2},$$

enquanto a derivada de $\sigma_1(u) = 1 - \psi(0)e^{-Ru}$ é na origem,

$$\sigma'_1(0) = R\psi(0) = \frac{R}{1 + \rho}.$$

Portanto, sempre que

$$R > \frac{\rho}{\mu(1 + \rho)},$$

verifica-se também junto à origem a desigualdade

$$1 - \psi(0)e^{-Ru} \geq \sigma(u). \tag{7.21}$$

Para estas distribuições, é pois natural que a desigualdade se mantenha para todos os valores de u , dado tratar-se de uma função côncava, coincidente com $\sigma(u)$ nos extremos do intervalo $[0, \infty]$ e que, junto a estes, se mostra superior ou igual ao verdadeiro valor da probabilidade de sobrevivência. Nesses casos ter-se-á então,

$$\psi(0)e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (7.22)$$

7.4 Fórmula recursiva para a probabilidade de ruína em tempo finito

Tanto no modelo clássico como no modelo de renascimento ordinário, condicionando pelo instante de ocorrência e pelo montante da indemnização do primeiro sinistro, é válida a seguinte equação para a probabilidade de sobrevivência:

$$\sigma(u, t) = \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau + 1 - G(t), \quad (7.23)$$

igualdade na qual $g(\cdot)$ e $G(\cdot)$ são respectivamente a função densidade e a função de distribuição do tempo inter-sinistros e $f(\cdot)$ é a função densidade do montante de uma indemnização particular. Estamos em condições de enunciar o seguinte teorema:

Teorema 7.1 *Considerando a expressão iterativa*

$$\begin{aligned} \sigma_n(u, t) &= \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma_{n-1}(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau + 1 - G(t), \\ n &= 1, 2, \dots \text{ e } u < \infty, \end{aligned} \quad (7.24)$$

e partindo do valor inicial $\sigma_0(u, t) = 1$, verifica-se que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(u, t) = \sigma(u, t)$ e que este limite é atingido por valores superiores, isto é, que $\{\sigma_n(u, t), n = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma sucessão monótona decrescente.

Demonstração Uma vez que $\sigma(u, t) < 1$ para $t > 0$ e $u < U$, sendo U um valor limite que depende de t bem como das distribuições consideradas e da carga de segurança, torna-se óbvio que, logo após a primeira iteração,

$$\sigma_0(u, t) > \sigma_1(u, t) > \sigma(u, t). \quad (7.25)$$

Por outro lado, admitindo que

$$\sigma_{n-1}(u, t) > \sigma_n(u, t) > \sigma(u, t),$$

tem-se igualmente a certeza que

$$\sigma_n(u, t) > \sigma_{n+1}(u, t) > \sigma(u, t).$$

Com efeito, por (7.24), a primeira desigualdade é imediata. Para a segunda, substituindo no segundo membro da equação (7.23) $\sigma(u+c\tau-x, t-\tau)$ por $\sigma_n(u+c\tau-x, t-\tau)$ teremos,

$$\sigma(u, t) < \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma_n(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau + 1 - G(t) = \sigma_{n+1}(u, t).$$

Está pois provado, por indução, que $\{\sigma_n(u, t), n = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma sucessão estritamente decrescente. Resta pois provar que o limite existe e que iguala $\sigma(u, t)$. Como toda a sucessão monótona limitada tem limite, admitamos por hipótese que esse limite é $v(u, t) > \sigma(u, t)$. Aplicando mais uma vez a relação (7.24) teríamos

$$v_1(u, t) = \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) v(u + c\tau - x, t - \tau) dx d\tau + 1 - G(t),$$

a qual, por definição de limite, implica que

$$v_1(u, t) = v(u, t) = \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) v(u + c\tau - x, t - \tau) dx d\tau + 1 - G(t).$$

Uma vez que (7.23) só admite uma solução, teríamos $v(u, t) = \sigma(u, t)$, o que se torna absurdo perante a hipótese anterior. O teorema considera-se demonstrado. \square

No que se refere à rapidez de convergência, podemos dizer que, face aos casos práticos ensaiados, ela é relativamente elevada (com 15 iterações obtêm-se resultados com pelo menos três decimais exactas), dependendo naturalmente das distribuições e dos parâmetros considerados. Todavia, importa salientar que o tempo de cálculo, bem como a ocupação de memória do computador, crescem exponencialmente por cada iteração, uma vez que a dupla integração algébrica resulta num aumento muito significativo de novas parcelas de cada vez que é desencadeada.

Exemplo 7.1 Poisson (1) e montantes com distribuição exponencial

Poisson(1) / Exponential(1)

c = 1.1

Iteração

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,5365993	0,5365993	0,7619440	0,7619440	0,8802943	0,8802943	0,9996916	0,9996916
2	0,4071362	0,4071362	0,6454310	0,6454310	0,7943276	0,7943276	0,9986500	0,9986500
3	0,3447890	0,3447890	0,5740222	0,5740222	0,7315409	0,7315409	0,9967703	0,9967703
4	0,3066932	0,3066932	0,5247155	0,5247155	0,6835926	0,6835926	0,9941047	0,9941047
5	0,2804025	0,2804025	0,4881071	0,4881071	0,6455807	0,6455807	0,9907670	0,9907670
6	0,2608815	0,2608815	0,4595705	0,4595705	0,6145517	0,6145517	0,9868853	0,9868854
7	0,2456618	0,2456618	0,4365361	0,4365361	0,5886327	0,5886327	0,9825803	0,9825812
8	0,2333737	0,2333737	0,4174483	0,4174483	0,5665793	0,5665793	0,9779576	0,9779638
9	0,2231889	0,2231890	0,4013043	0,4013045	0,5475303	0,5475310	0,9731056	0,9731374
10	0,2145732	0,2145734	0,3874243	0,3874259	0,5308697	0,5308747	0,9680970	0,9682181

Tabela 10

A tabela anterior mostra que a precisão diminui com t, facto que se agrava para valores de u mais elevados, caso o número de iterações se mantenha. Neste exemplo foram realizadas 14 iterações.

Exemplo 7.2 *Poisson (1) e montantes com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Poisson(1) / Gama(2;2)

c = 1.1

Iteração

t	u = 0		u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1	0,4884085	0,4884085	0,7513234	0,7513234	0,8978161	0,8978161	0,9999823	0,9999823
2	0,3641062	0,3641062	0,6351154	0,6351154	0,8149902	0,8149902	0,9998333	0,9998333
3	0,3076573	0,3076573	0,5650207	0,5650207	0,7533220	0,7533220	0,9994071	0,9994071
4	0,2737618	0,2737618	0,5170447	0,5170447	0,7059408	0,7059408	0,9986105	0,9986105
5	0,2505766	0,2505766	0,4816262	0,4816262	0,6682891	0,6682891	0,9974103	0,9974107
6	0,2334582	0,2334582	0,4541301	0,4541301	0,6375256	0,6375256	0,9958156	0,9958214
7	0,2201653	0,2201653	0,4320059	0,4320059	0,6118227	0,6118228	0,9938597	0,9939013
8	0,2094663	0,2094663	0,4137200	0,4137201	0,5899563	0,5899573	0,9915875	0,9917754
9	0,2006211	0,2006212	0,3982882	0,3982902	0,5710756	0,5710865	0,9890468	0,9896477
10	0,1931546	0,1931564	0,3850462	0,3850638	0,5545703	0,5546422	0,9862840	0,9877574

Tabela 11

Tal como no exemplo anterior, a precisão diminui com o aumento de t ou de u, e depende naturalmente do número de iterações efectuadas (15 no presente caso).

Exemplo 7.3 *Erlang(2) e montantes com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Erlang(2) / Gama(2;2)
c = 1.1
Iteração

t	u = 0	u = 1	u = 2	u = 10
1	0,5826955	0,8447956	0,9523031	0,9999993
2	0,4323429	0,7347026	0,8932444	0,9999899
3	0,3662797	0,6632825	0,8426029	0,9999508
4	0,3270331	0,6128817	0,8008183	0,9998539
5	0,3003554	0,5750524	0,7661596	0,9996725
6	0,2807454	0,5453871	0,7370248	0,9993868
7	0,2655708	0,5213604	0,7121896	0,9989910
8	0,2533937	0,5014164	0,6907563	0,9985109
9	0,2433572	0,4845638	0,6721264	0,9980189
10	0,2349422	0,4702490	0,6560985	0,9976079

Tabela 12

Neste exemplo foram efectuadas 14 iterações. No presente caso não temos possibilidade de avaliar o erro cometido, dado que não temos conhecimento que alguma vez estes resultados tenham sido publicados ou da existência de algum algoritmo exacto para cálculo destas probabilidades. Todavia, alguns dos resultados da tabela anterior podem ser verificados na secção seguinte, na qual o algoritmo de cálculo, embora iterativo, nada tem que ver com o algoritmo usado nesta secção.

7.5 Desenvolvimento em série de $\sigma(u, t)$

Considerando de novo a equação de renascimento (7.23), é possível efectuar o desenvolvimento de $\sigma(u, t)$ em série de Mac-Laurin de potências de t . Com efeito, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 7.2 *No modelo de renascimento ordinário a série de Mac-Laurin da probabilidade de sobrevivência a t vem dada pela expressão*

$$\sigma(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} R_n(u, 0), \quad (7.26)$$

desenvolvimento no qual $R_n(., .)$ obedece à relação de recorrência

$$R_n(u, t) = R'_{n-1}(u, t) + g(t) \int_0^{u+ct} f(x) R_{n-1}(u + ct - x, 0) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.27)$$

relação na qual $R_0(u, t) = 1 - G(t)$ e $g(t)$ e $f(x)$ são respectivamente as funções densidade do tempo inter-sinistros e do montante das indemnizações particulares. A derivada que aparece

no segundo membro é em ordem a t . Por simplicidade de escrita consideraremos que u é uma constante, pelo que usaremos uma plica como símbolo de derivação.

Demonstração Considere-se de novo a relação (7.23) :

$$\sigma(u, t) = \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau + 1 - G(t).$$

Derivando em ordem a t teremos,

$$\begin{aligned} \sigma'(u, t) &= \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma'(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau \\ &\quad + g(t) \int_0^{u+ct} f(x) \sigma(u+ct-x, 0) - g(t) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Considerando

$$R_1(u, t) = g(t) \int_0^{u+ct} f(x) \sigma(u+ct-x, 0) - g(t)$$

e derivando $\sigma'(u, t)$ em ordem a t obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma''(u, t) &= \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma''(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau \\ &\quad + g(t) \int_0^{u+ct} f(x) \sigma'(u+ct-x, 0) + R_1'(u, t). \end{aligned}$$

Como porém pela relação (7.28) se verifica que $\sigma'(u, 0) = R_1(u, 0)$, a relação anterior pode escrever-se na forma

$$\begin{aligned} \sigma''(u, t) &= \int_0^t g(\tau) \int_0^{u+c\tau} f(x) \sigma''(u+c\tau-x, t-\tau) dx d\tau \\ &\quad + g(t) \int_0^{u+ct} f(x) R_1(u+ct-x, 0) + R_1'(u, t). \end{aligned}$$

Considerando

$$R_2(u, t) = g(t) \int_0^{u+ct} f(x) R_1(u+ct-x, 0) + R_1'(u, t),$$

e derivando $\sigma''(u, t)$ em ordem a t , obteríamos uma expressão análoga às anteriores e

$$R_3(u, t) = g(t) \int_0^{u+ct} f(x) R_2(u+ct-x, 0) + R_2'(u, t),$$

e assim sucessivamente. A relação (7.27) torna-se assim evidente e para qualquer valor de n teremos

$$\sigma^{(n)}(u, 0) = R_n(u, 0),$$

pelo que o teorema se considera demonstrado. \square

Na prática, a utilização recursiva da fórmula (7.27) revela-se interessante, embora para valores elevados de t seja necessário um número também relativamente elevado de iterações, facto que implica a utilização de processadores rápidos e de memórias *Ram* extensas.

Exemplo 7.4 *Poisson (1) e montantes com distribuição exponencial*

Poisson(1) / Exponencial(1)

c = 1.1

Série de Mac-Laurin

t	u = 1		u = 2		u = 10	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
0,5	0,8556566	0,8556566	0,9356401	0,9356401	0,9999209	0,9999209
1	0,7619440	0,7619440	0,8802943	0,8802943	0,9996916	0,9996916
1,5	0,6954970	0,6954971	0,8337136	0,8337136	0,9992742	0,9992742
2	0,6454310	0,6454309	0,7943276	0,7943277	0,9986500	0,9986500
2,5	0,6060350	0,6060008	0,7606598	0,7607117	0,9978139	0,9978139
3	0,5740222	0,5703005	0,7315409	0,7371751	0,9967703	0,9967703

Tabela 13

A tabela anterior foi construída a partir de 28 iterações, número insuficiente para t poder ir além do valor 3. Notamos porém que, ao contrário do algoritmo da secção precedente, neste caso, com o mesmo número de iterações, os resultados são melhores para valores da reserva inicial mais elevados.

Exemplo 7.5 *Erlang(2) e montantes com distribuição exponencial*

Erlang(2) / Exp(1)

c = 1.1

Série de Mac-Laurin

t	u = 1	u = 2	u = 10	u = 13	u = 15
0,5	0,9240901	0,9702912	0,9999846	0,9999991	0,9999999
1	0,8389504	0,9298925	0,9999322	0,9999954	0,9999992
1,5	0,7740408	0,8921399	0,9998249	0,9999862	0,9999975
2	0,7235236	0,8582030	0,9996473	0,9999686	0,9999394
2,5	0,6829755	0,8280062	0,9993885	0,9999395	0,9999875
3	0,6495893	0,8011402	0,9990409	0,9998957	0,9999772
3,5	0,6215215	0,7771481	0,9986005	0,9998345	0,9999619
4	0,5967929	0,7557527	0,9980657	0,9997531	0,9999403

Tabela 14

Também neste caso não existem dados publicados que nos permitam verificar as valores constantes da tabela anterior.

Exemplo 7.6 *Erlang(2) e montantes com distribuição $\Gamma(2, 2)$*

Erlang(2) / Gama(2;2)

c = 1.1

Série de Mac-Laurin

t	u = 0	u = 1	u = 2	u = 10	u = 12
0,1	0,9826605	0,9935165	0,9985516	1,0000000	1,0000000
0,2	0,9406821	0,9790185	0,9952715	1,0000000	1,0000000
0,3	0,8867220	0,9612597	0,9910604	1,0000000	1,0000000
0,4	0,8296323	0,9426540	0,9863052	1,0000000	1,0000000
0,5	0,7747906	0,9243235	0,9811745	0,9999999	1,0000000
0,6	0,7249444	0,9067227	0,9757553	0,9999999	1,0000000
0,7	0,6810867	0,8899881	0,9701078	0,9999998	1,0000000
0,8	0,6431728	0,8741209	0,9642849	0,9999997	1,0000000
0,9	0,6106320	0,8590753	0,9583352	0,9999995	1,0000000
1	0,5826956	0,8447956	0,9523031	0,9999993	1,0000000
1,1	0,5585857	0,8312294	0,9462272	0,9999990	0,9999999
1,2	0,5376198	0,8183308	0,9401399	0,9999986	0,9999999
1,3	0,5193604	0,8060615	0,9340689	0,9999981	0,9999999
1,4	0,5044896	0,7944087	0,9280456	0,9999975	0,9999999
1,5	0,5004415	0,7835099	0,9221585	0,9999968	0,9999998
1,6	0,5533685	0,7743614	0,9168502	0,9999959	0,9999997

Tabela 15

Com as 28 iterações efectuadas, constatamos que os resultados não podem ir além de $t = 1.5$.

A comparação dos valores, por exemplo para $t = 1$, entre a tabela anterior e os valores constantes da tabela 12, mostram que ambos deverão estar correctos e que os dois algoritmos funcionam bem.

Capítulo 8

Algumas considerações finais

Para além de numerosas deduções algébricas, resolução de equações diferenciais e integro-diferenciais, demonstração de teoremas e outras proposições, é claramente visível o papel das *transformadas de Fourier e Laplace na teoria do risco*, bem como noutros ramos da ciência e da engenharia e verifica-se, por consulta a qualquer obra ou artigo científico com ela relacionado, que a sua utilização tem sido uma ferramenta imprescindível de apoio ao desenvolvimento sustentado desta teoria bem como das muitas aplicações práticas dela decorrentes. Esta tese procura assim apenas mostrar que o papel destas transformadas está longe de se encontrar esgotado e que o recurso ao campo complexo pode potenciar a sua aplicação em numerosos casos para os quais os espaços euclidianos não são suficientes. Enquanto que a transformada de Fourier está por definição embebida no campo complexo, a transformada de Laplace é muitas vezes apenas referida ao campo real, retirando-lhe dessa forma o acesso a todo o ferramental algébrico que a análise complexa proporciona.

Se bem que, reconheçamos, as relações algébricas no campo complexo sejam mais difíceis de entender, ou melhor, de visualizar, também é legítimo reconhecer que a análise complexa é bem mais potente que a análise no campo real, pois oferece soluções nitidamente mais abrangentes, se bem que, muitas vezes, com severas restrições sobre os objectos de base utilizados (leia-se funções analíticas, ou pelo menos razoavelmente comportadas).

Ainda assim, foi gratificante desenvolver o presente trabalho, não só por nos ter permitido visitar vastas áreas da matemática desenvolvida nos últimos dois séculos, como por nos ter mostrado novos horizontes que não deixaremos de abordar proximamente. Nessa direcção, pensamos que o papel das duplas transformadas implícitas de Laplace merece um especial destaque, como ficou demonstrado pela obtenção de fórmulas explícitas para a probabilidade de ruína em tempo finito para o modelo clássico, e que as mesmas poderão ser extensivamente utilizadas em modelos não Poissonianos, como aliás (Dickson 1998) já demonstrou, faltando apenas a sua exploração algébrica mais detalhada e obviamente mais profícua. Não deixaremos de tentar aprofundar esta matéria, cientes que as dificuldades que iremos encontrar serão elevadas, mas que também, os resultados que se vierem a encontrar serão compensadores.

Não desejaríamos terminar estas notas sem uma breve referência ao papel dos algoritmos de natureza algébrica e numérica desenvolvidos, certos que da sua aplicação e possível refinamento muito haverá a esperar, até porque, a sua dependência do hardware e *software* instalados, se dilui no tempo com a “evolução exponencial” das tecnologias de informação e dos meios de computação disponíveis.

Bibliografia

- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A. & Nesbitt, C. J. (1997), *Actuarial Mathematics*, 2nd edn, The Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois, USA.
- Centeno, L. (2001), *Teoria do Risco*, Texto de Apoio nº 17/TA, Cemapre-ISEG, Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa.
- Dickson, D. C. M. (1992), ‘On the distribution of the surplus prior to ruin’, *Insurance: Mathematics & Economics* **11**, 191–207.
- Dickson, D. C. M. (1993), ‘On the distribution of the claim causing ruin’, *Insurance: Mathematics & Economics* **12**, 143–154.
- Dickson, D. C. M. (1998), ‘On a class of renewal risk processes’, *North American Actuarial Journal* **2**(3), 60–73.
- Dickson, D. C. M. & Hipp, C. (2001), ‘On the time to ruin for erlang(2) risk processes’, *ime* **29**, 333–344.
- Dufresne, F. & Gerber, H. U. (1988), ‘The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin’, *Insurance: Mathematics & Economics* **7**, 193–199.
- Egídio dos Reis, A. D. (1993), ‘How long is the surplus below zero?’, *Insurance: Mathematics & Economics* **12**, 23–38.
- Egídio dos Reis, A. D. (1999), *Teoria da Ruína*, Texto de Apoio nº 17/TA, Cemapre-ISEG, Rua do Quelhas 6, 1200-781 Lisboa.
- Egídio dos Reis, A. D. (2002), ‘How many claims does it take to get ruined and recovered?’, *ime* **31**(2), 235–248.
- Gerber, H. U. (1979), *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, S.S. Huebner Foundation for Insurance Education, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pa. 19104, USA.
- Gerber, H. U., Goovaerts, M. J. & Kaas, R. (1987), ‘On the probability and severity of ruin’, *Astin Bulletin* **17**, 151–163.
- Gerber, H. U. & Shiu, E. S. W. (1998), ‘On the time value of ruin’, *North American Actuarial Journal* **2**, 48–78.
- Lima, F. D. P., Garcia, J. M. A. & Egídio dos Reis, A. D. (2002), ‘Fourier/Laplace transforms and ruin probabilities’, *Astin Bulletin* **32**(1), 91–105.

- Marsden, J. & Hoffman, M. (1999), *Basic complex analysis*, 3rd edn, W. H. Freeman, New York, USA.
- Parzen, E. (1964), *Stochastic Processes*, 2nd edn, Holden-Day, New York, USA.
- Seal, H. L. (1978), *Survival Probabilities*, John Wiley & Sons, New York.
- Sparre Andersen, E. (1957), ‘On the collective theory of risk in the case of contagion between the claims’, *Transactions of the XV International Congress of Actuaries* **2**, 219–229.

ANEXO I

RESUMO BÁSICO DE ANÁLISE COMPLEXA

TEOREMA DOS RESÍDUOS

1. Introdução

Procuramos dar neste resumo algumas características básicas de funções no campo complexo, nomeadamente a noção e principais propriedades das funções analíticas, necessárias para compreensão de certas partes do texto e do próprio teorema dos resíduos, pedra angular de toda a análise complexa.

Na sua forma mais simples o teorema dos resíduos diz-nos que o integral de uma função analítica f ao longo de uma curva simples fechada é igual ao produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos de f no interior dessa curva. Este teorema, cuja importância para a análise complexa é fundamental, tem por base o teorema de Cauchy e a respectiva fórmula integral, bem como o teorema do desenvolvimento de uma função complexa em série de Laurent. Dele resultam, por exemplo, as fórmulas de inversão algébrica das transformadas de Fourier e Laplace, cuja utilização se torna fulcral para determinação exacta das funções originais, quando são conhecidas as respectivas transformadas.

Supomos que o leitor está familiarizado com as operações elementares sobre números complexos, os quais se consideram definidos no espaço complexo a duas dimensões que designaremos pela letra \mathbb{C} . Não serão efectuadas demonstrações das proposições apresentadas, as quais poderão ser consultadas em qualquer obra de análise complexa e, nomeadamente, em (Marsden & Hoffman 1999).

Na secção 2 damos a noção de função contínua e de função analítica.

Na secção 3 são enunciadas as principais propriedades das funções analíticas.

A secção 4 é dedicada ao teorema de Cauchy e à fórmula integral de Cauchy.

Na secção 5 define-se série de Laurent bem como o desenvolvimento de uma função neste tipo de série.

Na secção 6 definimos ponto singular e procedemos à classificação deste género de pontos. É também dada a noção de resíduo.

A secção 7 é dedicada ao cálculo de resíduos.

Na secção 8 é enunciado o teorema dos resíduos e dá-se um exemplo da sua aplicação.

2. Funções contínuas e funções analíticas

Definição 2.1 - *Uma função f complexa de variável complexa com domínio num conjunto aberto $A \subset \mathbb{C}$ diz-se contínua no ponto $z_0 \in A$ se e só se*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

e f diz-se contínua em A se for contínua em cada ponto $z \in A$.

Da definição anterior, tal como no campo real, resulta que a proximidade entre z e z_0 arrasta a proximidade entre $f(z)$ e $f(z_0)$. Também como no campo real, a soma, produto e cociente de funções contínuas num dado domínio, são funções contínuas nesse domínio, desde que, no caso do cociente, o denominador não se anule nesse domínio.

Proposição 2.1 - Se f é uma função contínua num conjunto aberto $A \subset \mathbb{C}$ e se h é contínua em $f(A)$, então

$$(h \circ f) = h(f(z)),$$

é contínua em A .

Definição 2.2 - Considere-se $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. A função f diz-se derivável (no sentido complexo) em $z_0 \in A$ se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Este limite é denotado habitualmente por $f'(z_0)$ e é um número complexo.

Notamos que da forma como os limites são definidos no campo complexo, z aproxima-se de z_0 de forma arbitrária e nunca segundo uma direcção particular.

Definição 2.3 - Uma função diz-se analítica em A se for derivável em cada ponto $z_0 \in A$. Diz-se analítica num ponto z_0 no sentido de ser analítica numa vizinhança circular ou disco $D(z_0, r)$.

Notamos que o disco $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$, é constituído pelos complexos situados no interior de um círculo de raio r (sem a circunferência de fronteira) centrado em z_0 , sendo por isso um conjunto aberto.

Da definição de derivada conclui-se de imediato que, se f é derivável em z_0 , é contínua nesse ponto.

3. Propriedades das funções analíticas e respectivas derivadas

De modo geral, as regras de derivação de funções reais de variável real são aplicáveis a funções analíticas. Com efeito, demonstra-se a seguinte proposição:

Proposição 3.1 - Se f e g são funções analíticas num conjunto aberto $A \subset \mathbb{C}$, então

1) $af + bg$ é analítica em A e $(af + bg)'(z) = af'(z) + bg'(z)$, para quaisquer números complexos a e b .

2) fg é analítica em A e $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

3) se $g(z) \neq 0$ para todo o $z \in A$, então f/g é analítica em A e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

4) qualquer polinómio $a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ é analítico em \mathbb{C} com derivada $a_1 + 2a_2z + \dots + na_nz^{n-1}$.

5) qualquer fracção racional

$$\frac{a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n}{b_0 + b_1z + \dots + b_mz^m},$$

é analítica num conjunto aberto constituído por todos os complexos com excepção dos zeros do denominador.

6) se f é analítica em A e g é analítica em B (A e B conjuntos abertos) e se $f(A) \subset B$,

$$\frac{d}{dz}g[f(z)] = g'[f(z)]f'(z).$$

7) para todo o $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{d}{dz}e^z = e^z.$$

Logaritmos - A função $\log(z)$, inversa da exponencial, pode ser derivada como se fosse uma função de variável real, desde que esteja definida num dos ramos em que é analítica. Repare-se que, considerando coordenadas polares, qualquer complexo z pode ser escrito na forma

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|e^{i(\theta+2k\pi)}, \text{ com } \theta = \arg(z),$$

e

$$\log(z) = \log|z| + i\theta \neq \log|z| + i(\theta + 2k\pi),$$

pelo que, para não haver ambiguidade, há que escolher o intervalo de amplitude 2π em que se pretende considerar o argumento θ . Se a função $\arg(z)$ está definida, por exemplo, no intervalo $[0, 2\pi)$, verifica-se que, sempre que se atravessa a parte positiva do eixo real, a função salta 2π . Neste caso, para que o logaritmo fosse função analítica, teríamos de eliminar a parte positiva do eixo real, impedindo qualquer cálculo com logaritmos naturais de números reais. Por essa razão, é preferível eliminar a parte negativa do eixo real, para o que basta considerar $\arg(z)$ no intervalo $(-\pi, \pi)$.

O ramo do logaritmo definido por

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z) \quad -\pi < \arg(z) < \pi,$$

chama-se ramo principal e neste caso a função é analítica no conjunto

$$\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x \leq 0 \text{ e } y = 0\},$$

tendo por derivada

$$\frac{d}{dz} \log(z) = \frac{1}{z}.$$

Funções trigonométricas - As funções seno e cosseno são analíticas em \mathbb{C} , podendo ser derivadas como as correspondentes funções de variável real.

Funções potência - As funções envolvendo potências têm de ser analisadas com cuidado. Considerando duas constantes complexas a e b , pode-se enunciar a seguinte proposição:

Proposição 3.2

1) Para qualquer ramo da função logaritmo (desde que contenha a) a função $f(z) = a^z$ é analítica em \mathbb{C} com derivada $f'(z) = \log(a) a^z$. Note-se que $a^z = e^{z \log(a)}$.

2) Para um ramo específico da função logaritmo (o principal ou outro) a função $f(z) = z^b$ é analítica no domínio do ramo escolhido e tem derivada $f'(z) = bz^{b-1}$. Se b é um inteiro não negativo, a função é analítica em \mathbb{C} .

É portanto imprescindível analisar bem, por exemplo, raízes de funções complexas, cujo domínio de analiticidade é por vezes difícil de determinar.

Notamos que esta questão se revela de particular importância e melindre na aplicação do teorema dos resíduos e nas fórmulas de inversão das transformadas de Fourier e Laplace.

Por exemplo a função $f(z) = \sqrt{e^z + 1}$, escolhendo o ramo principal para o logaritmo, é analítica no conjunto

$$A = \mathbb{C} \setminus \{x + iy : x \geq 0, y = (2n + 1)\pi, n \text{ inteiro}\},$$

e neste conjunto tem derivada

$$f'(z) = \frac{e^z}{2\sqrt{e^z + 1}}.$$

4. O teorema de Cauchy e a fórmula integral de Cauchy

Na sua versão mais simples, o teorema de Cauchy tem o seguinte enunciado:

Teorema 4.1 - Se γ é uma curva simples fechada e, sobre γ e no seu interior, $f(z)$ é uma função analítica, então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1)$$

Teorema 4.2 - Fórmula integral de Cauchy - se $f(z)$ é analítica numa região A , se γ é uma curva contida em A homotópica com um dado ponto e considerando um ponto $z_0 \in A$ não situado sobre γ , então verifica-se a igualdade

$$f(z_0)I(\gamma; z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz, \quad (2)$$

expressão na qual $I(\gamma; z_0)$ corresponde ao índice de enrolamento de γ em torno de z_0 .

No caso particular, mas de aplicação bastante geral, de γ ser uma curva simples fechada e de z_0 estar no seu interior, $I(\gamma; z_0) = 1$ e a fórmula anterior reduz-se a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz. \quad (3)$$

A expressão anterior é notável pois mostra que uma função analítica sobre e no interior de um contorno fechado fica completamente determinada pelos valores que toma sobre esse contorno, ou por outras palavras, que o valor da função é determinado por qualquer fronteira analítica.

A *fórmula integral de Cauchy* para derivadas acrescenta ao teorema anterior que, em idênticas condições,

$$f^{(k)}(z_0) I(\gamma; z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz, \quad (4)$$

expressão na qual $f^{(k)}(z_0)$ é a derivada de ordem k de f avaliada no ponto z_0 .

5. A série de Laurent

Tal como nas funções reais de variável real, no campo complexo, a série de Taylor permite-nos obter a expansão de uma função analítica num disco $D(z_0, r)$ centrado num dado ponto z_0 , em potências de $(z - z_0)$, no interior do qual a série assim obtida tem a forma

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \dots, \quad (5)$$

e dentro do qual a série é sempre convergente. Porém, tal desenvolvimento não é possível quando no interior do referido disco existem pontos que se designam por *pontos singulares* e nos quais a função considerada não é analítica. Tal é o caso de $1/z^2$ e $\exp(1/z)$, por exemplo, em torno de $z_0 = 0$. Para estas funções existe uma outra expansão, chamada série de Laurent, que para além das potências positivas consideradas na série de Taylor, considera também potências negativas.

Teorema 5.1 - *Teorema da expansão de Laurent* - considerem-se duas circunferências centradas em z_0 e admita-se que $f(z)$ é analítica no anel por elas limitado. Então, para qualquer ponto desse anel, é válido o seguinte desenvolvimento

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}, \quad (6)$$

no qual as duas séries convergem absolutamente. Se γ é uma circunferência igualmente centrada em z_0 e contida no referido anel, então são válidas as expressões

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\nu)}{(\nu - z_0)^{n+1}} d\nu, \quad (7)$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\nu) (\nu - z_0)^{n-1} d\nu. \quad (8)$$

6. A classificação dos pontos singulares

Por definição um ponto singular z_i diz-se isolado quando $f(z)$ é analítica num anel centrado nesse ponto e no qual a circunferência interior tem um raio ϵ arbitrariamente pequeno. Pelo que anteriormente se disse, é válido nesse anel o desenvolvimento em série de Laurent.

A classificação dos pontos singulares, ou singularidades, efectua-se justamente pelo tipo de desenvolvimento das potências negativas da série de Laurent. Assim, se é finito o número de coeficientes b_n , sendo a maior ordem deles o inteiro k , diremos que se trata de um *polo de ordem k* . No caso especial de $k = 1$, diremos que temos um *polo simples*.

Se o número de coeficientes diferentes de zero for infinito, diremos que se trata de uma *singularidade essencial*. Caso todos os coeficientes de tipo b sejam nulos, estamos em presença de uma singularidade amovível.

Uma função analítica numa região G com excepção de alguns polos, diz-se *meromórfica em G* . Caso G seja todo o campo complexo, dir-se-á simplesmente *meromórfica*.

Ao coeficiente b_1 chama-se *resíduo* de f em z_i e ver-se-á pelo teorema dos resíduos quão importante é a sua determinação.

Pelo que anteriormente se disse, f tem um polo de ordem k em z_0 se e somente se, em torno desse ponto, ela admitir o desenvolvimento em série de Laurent do tipo

$$\frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (9)$$

A parte da série correspondente aos coeficientes de tipo b designa-se por *parte principal*, a qual nos diz quão singular é a função em z_0 .

7. O cálculo de resíduos

Para se efectuar o cálculo de resíduos em *polos* não se torna necessário conhecer o desenvolvimento em série de Laurent. Com efeito, demonstra-se pelo desenvolvimento da própria série que, se $f(z)$ tem um polo de ordem k em z_0 , então o resíduo nesse polo vem dado pela expressão

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{\phi^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}, \quad (10)$$

na qual se considerou $\phi(z) = (z - z_0)^k f(z)$. No caso mais vulgar de polos simples a expressão anterior continua válida, mas sempre que a função f apareça na forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad (11)$$

o resíduo num polo simples z_0 pode também ser calculado pela expressão

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (12)$$

Naturalmente que, se $h(z)$ está factorizado na forma $(z - z_0) h_1(z)$, se verifica que $h'(z_0) = h_1(z_0)$, sendo nesse caso indiferente a utilização da fórmula (10) ou da fórmula (12).

Para singularidades essenciais não há fórmulas algébricas para o cálculo dos resíduos, pelo que, nestes casos, a única alternativa consiste na obtenção da própria série de Laurent.

Exemplo - Considere-se a função

$$f(z) = -\exp\left(\frac{1}{z}\right) \frac{2}{z},$$

que tem uma singularidade essencial para $z = 0$. Teremos:

$$f(z) = -\frac{2}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots\right) = -2z^{-1} - 2z^{-2} - \dots,$$

pelo que o resíduo para $z = 0$ será -2 .

8. Teorema dos resíduos

Na sua forma mais simples o teorema dos resíduos tem o enunciado que segue:

Teorema 8.1 - *O integral de uma função analítica f ao longo de uma curva simples fechada é igual ao produto de $2\pi i$ pela soma dos resíduos de f no interior dessa curva.*

Este teorema, cuja importância para a análise complexa é fundamental, tem por base o teorema de Cauchy e a respectiva fórmula integral, bem como o teorema do desenvolvimento de uma função complexa em série de Laurent. Dele resultam, por exemplo, as fórmulas de inversão algébrica das transformadas de Fourier e Laplace, cuja utilização se torna fulcral para determinação exacta das funções originais, quando são conhecidas as respectivas transformadas.

Na sua forma mais geral, o teorema tem o enunciado seguinte:

Teorema 8.2 - *Seja A uma região do espaço complexo na qual $f(z)$ é analítica excepto para as singularidades isoladas z_1, \dots, z_n . Seja γ uma curva fechada contida em A mas que não passe por alguma daquelas singularidades. Então,*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n [\text{Res}(f; z_k)] I(\gamma; z_k), \quad (13)$$

expressão na qual $\text{Res}(f; z_k)$ é o resíduo de f no ponto z_k e $I(\gamma; z_k)$ o índice de enrolamento de γ em torno de z_k .

Se γ é um contorno simples fechado, então $I(\gamma; z_k)$ será 1 ou 0, consoante z_k seja interior ou exterior a γ , pelo que a fórmula anterior se reduz a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=k_1}^{k_m} [\text{Res}(f; z_{k_j})], \quad (14)$$

igualdade na qual z_{k_j} é um ponto interior a γ .

Exemplo - Avaliação do integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + a^2 - 2a \cos(x)}, \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

Para aplicar o teorema dos resíduos é necessário transformar o intervalo de integração numa curva fechada. Efectuando a mudança de variável $z = \exp(ix)$, quando x varia de 0 a 2π , z percorre uma circunferência γ de raio 1 e deduz-se que

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i} \quad e \quad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

e

$$\frac{dz}{dx} = ie^{ix} = iz.$$

Com a referida mudança teremos

$$\begin{aligned} I &= \int_{\gamma} \frac{1}{1 + a^2 - \frac{2a}{2}(z + 1/z)} \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z + a^2z - az^2 - a} \\ &= \int_{\gamma} \frac{idz}{a(z - a)(z - 1/a)}. \end{aligned}$$

A função integranda tem dois polos simples $z = a$ e $z = 1/a$. Como neste caso o denominador está factorizado teremos os seguintes resíduos

$$\begin{aligned} r_1 &= \left[\frac{i}{a(z - 1/a)} \right]_{z=a} = \frac{i}{a^2 - 1} \\ r_2 &= \left[\frac{i}{a(z - a)} \right]_{z=1/a} = \frac{i}{1 - a^2}. \end{aligned}$$

Se $a < 1$, a é interior a γ e $1/a$ exterior, pelo que aplicando o teorema dos resíduos,

$$I = 2\pi i \left(\frac{i}{a^2 - 1} \right) = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Se $a > 1$, a é exterior a γ e $1/a$ interior, pelo que aplicando o teorema dos resíduos,

$$I = 2\pi i \left(\frac{-i}{a^2 - 1} \right) = \frac{-2\pi}{1 - a^2}.$$

ANEXO II

ALGORITMO ARBORESCENTE PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. Introdução

Dos vários algoritmos disponíveis para o cálculo aproximado de integrais, parece-nos extremamente interessante e eficaz, pelas suas propriedades, o método ou regra de Simpson (RS) . Contudo, este método torna-se algo impreciso quando a função integranda oscila demasiado em relação à dimensão do intervalo de integração, facto que ocorre quase sempre nos casos em que dela fazem parte funções circulares ou periódicas. Acrescente-se a este facto, a impossibilidade de, em numerosas situações, ser difícil ou mesmo impossível, determinar um majorante para a quarta derivada da função integranda, única forma de se poder calcular um majorante para o erro absoluto cometido. Por outro lado, uma "crítica" que se pode de imediato fazer a este algoritmo, é a de que ele subdivide por igual o intervalo de integração, quando é sabido que muitas funções integrandas têm formatos diferenciados com diferentes curvaturas, consoante os troços considerados.

Seria pois extremamente útil desenvolver um algoritmo que de certa forma, se adaptasse a esses diferentes formatos, por forma a minimizar a acumulação de erros inúteis por subdivisão excessiva em troços de curvatura fraca, em oposição a um deficit de subdivisão em troços de forte ou frequente oscilação da função integranda. Surgiu assim a ideia de criar um algoritmo que testasse essas necessidades, ao longo do seu natural desenvolvimento. Esse algoritmo é relativamente simples de entender e de programar e a sua explicação será dada no ponto seguinte para um integral a uma única dimensão. No ponto 3, generaliza-se para outras dimensões.

Como a base de cálculo que se vai utilizar continua a ser a regra de Simpson, passamos rapidamente ao resumo da mesma para uma dimensão.

Consideremos uma função $f(x)$ contínua e integrável no intervalo $[a, b]$. A RS diz-nos que dividindo o intervalo em duas partes iguais e considerando o ponto médio m do intervalo, se tem

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(m) + f(b)] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(c), \quad (15)$$

em que c é um ponto situado entre a e b . Sabe-se que esta regra tem por base a aproximação da função integranda por uma parábola que passa pelos três pontos considerados.

A regra de Sympson geral (RSG) subdivide o intervalo de integração em $2n$ partes iguais, dando origem à fórmula aproximada

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[f(a) + 4 \sum_{k=1}^n f_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f(b) \right], \quad (16)$$

expressão na qual $f_k = f(a + kh)$, sendo $h = \frac{b-a}{2n}$ o diâmetro da decomposição. Sabe-se ainda que o erro absoluto cometido não excede $\left| \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \right| f^{IV}(c)$.

2. A aproximação dicotómica

Consideremos que a dado passo do algoritmo, desejamos calcular o integral I_k correspondente ao intervalo $[a_k, b_k] \subset [a, b]$. Consideremos o ponto médio m_k desse intervalo. Teremos então,

$$I_k = \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx = \int_{a_k}^{m_k} f(x)dx + \int_{m_k}^{b_k} f(x)dx \quad (17)$$

Se considerarmos L_k o sub-integral esquerdo e R_k o sub-integral direito, a igualdade anterior escrever-se-á

$$I_k = L_k + R_k \quad (18)$$

Acontece porém que, pelo facto de efectuarmos um cálculo aproximado destes três integrais pela RSG, aqueles valores em geral não coincidem. Será pois a comparação entre os dois lados, numericamente avaliados, da equação, que nos permitirá concluir se é necessário ou não continuar a subdividir aquele intervalo. Assim, se $|I_k - L_k - R_k| > \varepsilon_j$, sendo ε_j o erro máximo admitido para o nível j das subdivisões às quais pertence o intervalo $[a_k, b_k]$, proceder-se-á a nova subdivisão, começando pelo sub-intervalo esquerdo $[a_k, m_k]$, ou seja, considerando $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m_k]$ - intervalo que terá então o nível $j + 1$, o que significa que o seu comprimento será $(b - a)/2^{j+1}$.

O processo de subdivisão sucessiva de intervalos continua, sempre considerando o nó esquerdo, isto é, subdividindo sempre o intervalo do lado esquerdo, até que, para dados valores de $n > k$ e $j_n > j$, teremos $|I_n - L_n - R_n| \leq \varepsilon_{j_n}$. Aí as subdivisões param e o valor global do integral, até este passo já calculado, será adicionado de $L_k + R_k$.

Pela análise do algoritmo até ao momento efectuada, verifica-se que, sendo o intervalo de arranque o próprio intervalo (a, b) , então o primeiro sub-intervalo que conta, para efeito do valor global do integral, tem o seu limite inferior igual a a . Uma vez avaliado I_n , que mais não é que o integral do sub-nó esquerdo do nó $n - 1$, há que avaliar o sub-nó direito deste último, ou seja, vai-se tentar calcular o integral do intervalo (m_{n-1}, b_{n-1}) , o qual segue os passos anteriores explicados para $[a_k, b_k]$.

Podemos verificar-se que se trata de um percurso de uma árvore binária, que tem por raiz o nó (a, b) , com subida pelo lado esquerdo, excepto quando o nó esquerdo já se encontra avaliado. A descida efectua-se pelo percurso inverso e mantém-se, enquanto os nós visitados nesse percurso estiverem totalmente avaliados, isto é, enquanto os nós visitados neste percurso inverso forem nós direitos.

O algoritmo termina na descida, quando este percurso chega ao intervalo original via sub-nó direito. Podia terminar antes, logo que o último nó avaliado tivesse b como extremo superior, mas convenhamos que não seria elegante ficar pendurado numa árvore!

Pela descrição sucinta efectuada, pode verificar-se que os nós avaliados correspondem às folhas da árvore, os quais são nós contíguos que no final, cobrem o intervalo original através de uma partição deveras curiosa. Com efeito, nas zonas onde a função integranda possa ser aproximada por, ou coincida mesmo com, um polinómio de grau não superior a três, não há qualquer subdivisão. A explicação é simples - o algoritmo de Simpson naqueles casos é exacto. Este facto faz com que a integração em longos intervalos, sempre que a função tenha zonas de estacionaridade, seja extremamente rápida.

Outro facto importante, é que este algoritmo integra funções descontínuas, desde que estas formem um conjunto numerável. Com efeito, os pontos de descontinuidade ou coincidem com

um dos extremos de um qualquer sub-intervalo ou são isolados pelas sucessivas subdivisões.

No que toca ao erro máximo admitido, tanto se pode optar por estabelecer um erro para cada nível da árvore, como se pode estabelecer um valor único para ϵ , por exemplo $\epsilon = 10^{-10}$, o qual garante em geral, um erro global inferior a 10^{-9} .

O algoritmo pode ser programado em qualquer linguagem com primitivas matemáticas, embora uma linguagem recursiva tenha vantagem, uma vez que, nesse caso, o controle das pilhas auxiliares que servem para registar os percursos ascendentes e respectivos nós, permitindo depois o recuo na árvore, pode ser automatizado.

3. A generalização a diversas dimensões

Comecemos por considerar um espaço euclideano a 2 dimensões, no qual pretendemos calcular o integral

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (19)$$

Consideremos as coordenadas x_0, y_0 do centro do rectângulo de integração. Pela regra de Simpson teremos

$$\int_a^b f(x, y) dx = \frac{b-a}{6} [f(a, y) + 4f(x_0, y) + f(b, y)] + \epsilon_0, \quad (20)$$

$$\int_c^d f(a, y) dy = \frac{d-c}{6} [f(a, c) + 4f(a, y_0) + f(a, d)] + \epsilon_1, \quad (21)$$

$$\int_c^d f(x_0, y) dy = \frac{d-c}{6} [f(x_0, c) + 4f(x_0, y_0) + f(x_0, d)] + \epsilon_2, \quad (22)$$

$$\int_c^d f(b, y) dy = \frac{d-c}{6} [f(b, c) + 4f(b, y_0) + f(b, d)] + \epsilon_3. \quad (23)$$

Integrando ambos os membros da relação (20) em y teremos:

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy &= \int_c^d \left[\frac{b-a}{6} [f(a, y) + 4f(x_0, y) + f(b, y)] + \epsilon \right] dy \\ &= \frac{(b-a)(d-c)}{36} \left[\begin{array}{c} f(a, c) + 4f(a, y_0) + f(a, d) + \\ 4[f(x_0, c) + 4f(x_0, y_0) + f(x_0, d)] + \\ f(b, c) + 4f(b, y_0) + f(b, d) \end{array} \right] + \epsilon, \end{aligned} \quad (24)$$

em que o erro verifica a desigualdade

$$\begin{aligned} |\epsilon| &\leq (d-c) |\epsilon_0| + \frac{b-a}{6} (|\epsilon_1| + |\epsilon_2| + |\epsilon_3|) \\ &\leq \frac{(d-c)(b-a)^5}{2880} M + \frac{(b-a)(d-c)^5}{2 \cdot 2880} M, \end{aligned} \quad (25)$$

em que M é um limite superior para o módulo da quarta derivada parcial da função no rectângulo considerado. O erro será nulo se as linhas de intersecção da superfície $z = f(x, y)$

com os planos paralelos ao eixo z forem, dentro do rectângulo de integração, polinómios de grau não superior a três.

Se considerarmos um quadrado de lado d , em vez de um rectângulo de integração, e se designarmos por I o valor do integral, teremos a partir da relação (24)

$$I = \frac{d^2}{36} \left(\sum_{i=1}^4 f(A_i) + 4 \sum_{i=1}^4 f(C_i) + 16f(C) \right) + \epsilon, \quad (26)$$

em que A_i são os vértices do quadrado, C_i os pontos médios dos lados e C o respectivo centro. Note-se que a igualdade anterior se pode escrever na forma

$$I = \left(\frac{d}{6} \right)^2 \sum_{i=1}^{3^2} 4^k f(X_{ik}) + \epsilon,$$

igualdade na qual X_{ik} representa genericamente qualquer ponto do quadrado de integração no qual há exactamente k coordenadas coincidentes com o centro C . Com efeito, os vértices A_i , que são quatro, ficarão representados por X_{i0} , com $i = 1, 2, 3$ e 4 , os centros dos lados por X_{i1} , com $i = 5, 6, 7$ e 8 e finalmente o centro por X_{93} . Note-se ainda que o índice i pode ter outra qualquer ordem, desde que os nove pontos sejam considerados. A expressão anterior pode ser facilmente generalizada a n dimensões, dando para valor do integral de um hipercubo de aresta d

$$I = \left(\frac{d}{6} \right)^n \sum_{i=1}^{3^n} 4^k f(X_{ik}) + \epsilon \quad (27)$$

igualdade na qual X_{ik} representa genericamente qualquer ponto do hipercubo no qual há exactamente k coordenadas coincidentes com o centro C .

Retomando o integral a duas dimensões dado por (19), não temos necessariamente um quadrado de integração, contudo, pode-se igualar sempre o menor lado ao maior, desde que a função integranda se considere nula nessa extensão. Por exemplo, se desejamos calcular o integral

$$\int_0^2 \int_1^5 f(x, y) dy dx,$$

podemos calcular em alternativa o integral

$$\int_0^4 \int_1^5 f(x, y) dy dx,$$

desde que se considere $f(x, y) = 0$ para $x > 2$.

O algoritmo binário para uma dimensão pode-se então estender com facilidade a duas (ou n) dimensões, considerando que, neste caso, a subdivisão de um quadrado, dá origem a quatro sub-quadrados. Assim, a árvore deixa de ser binária para passar a ser quaternária, isto é, cada nó terá quatro sub-nós. As subdivisões sucessivas param sempre que o integral de um dado nó coincide com a soma dos integrais dos quatro sub-nós filhos, a menos do erro máximo admitido.

Em alternativa a este algoritmo, pode sempre utilizar-se o algoritmo a uma dimensão, considerando que o integral original $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ se pode escrever na forma

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b g(x) dx,$$

expressão na qual $g(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, a qual por sua vez, pode ser avaliada para cada valor de x por recurso ao mesmo algoritmo aplicado à função $f(x, y)$, mas no qual x é uma constante.

Devemos notar que a velocidade e precisão de cálculo dos dois tipos de algoritmo não se diferenciam significativamente, embora dependam das dimensões dos intervalos de integração e do comportamento da função integranda nas diversas sub-áreas consideradas.

ANEXO III

FUNÇÕES DE BESSEL E HIPERGEOMÉTRICA GENERALIZADA

1. Equação diferencial de Bessel

Seja $y = f(x)$. A equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 + n^2)y = 0, \quad n \geq 0,$$

é conhecida como *Equação diferencial de Bessel*.

As soluções desta equação são conhecidas como *funções de Bessel de ordem n* e são classificadas por primeiro e segundo tipo (J e Y respectivamente).

2. Funções de Bessel de ordem n do primeiro tipo (J)

Estas funções são definidas pelas igualdades

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{-n+2k}}{k! \Gamma(k-n+1)}.$$

Verificam-se ainda as relações

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x).$$

3. Funções de Bessel de ordem n do segundo tipo (Y)

Estas funções são definidas pela igualdade

$$Y_n(x) = \begin{cases} \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} & n \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}.$$

4. Soluções para a equação diferencial de Bessel

Para quaisquer constantes A e B a equação diferencial de Bessel tem como soluções

$$\begin{aligned} y &= AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) & n &\neq 0, 1, 2, \dots \\ y &= AJ_n(x) + BY_n(x) & n &\geq 0 \\ y &= AJ_n(x) + BJ_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)} & n &\geq 0 \end{aligned}.$$

5. Equação diferencial de Bessel modificada

A equação diferencial

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2) y = 0 \quad n \geq 0,$$

é conhecida como *Equação diferencial de Bessel modificada*.

As soluções desta equação são conhecidas como *funções de Bessel modificadas de ordem n* e são classificadas por primeiro e segundo tipo (I e K respectivamente).

6. Funções de Bessel modificadas de ordem n do primeiro tipo (I)

Estas funções são definidas pelas igualdades

$$\begin{aligned} I_n(x) &= i^{-n} J_n(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k! \Gamma(k+n+1)} \\ I_{-n}(x) &= i^{-n} J_{-n}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{-n+2k}}{k! \Gamma(k-n+1)}. \end{aligned}$$

7. Funções de Bessel modificadas de ordem n do segundo tipo (K)

Estas funções são definidas pela igualdade

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} [I_{-n}(x) - I_n(x)] & n \neq 0, 1, 2, \dots \\ \lim_{p \rightarrow n} \frac{\pi}{2 \sin(p\pi)} [I_{-p}(x) - I_p(x)] & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

8. Soluções para a equação diferencial de Bessel modificada

Para quaisquer constantes A e B a equação diferencial de Bessel tem como soluções

$$\begin{aligned} y &= AI_n(x) + BI_{-n}(x) & n \neq 0, 1, 2, \dots \\ y &= AI_n(x) + BK_n(x) & n \geq 0 \\ y &= AI_n(x) + BI_n(x) \int \frac{dx}{x I_n^2(x)} & n \geq 0 \end{aligned}.$$

9. Função hipergeométrica generalizada

A função *hipergeométrica generalizada* $F(n, d, z)$ também conhecida por função *hipergeométrica generalizada de Barnes*, é definida pela igualdade

$$F(n, d, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n_1 + k) \dots \Gamma(n_p + k) / \Gamma(n_1) \dots \Gamma(n_p) z^k}{\Gamma(d_1 + k) \dots \Gamma(d_q + k) / \Gamma(d_1) \dots \Gamma(d_q) k!},$$

na qual

$$\begin{aligned} n &= [n_1, n_2, \dots, n_p] && \text{lista de parâmetros do numerador (que pode ser vazia)} \\ d &= [d_1, d_2, \dots, d_q] && \text{lista de parâmetros do denominador (que pode ser vazia)} \end{aligned}$$

e onde z representa uma expressão algébrica.

Nos casos em que uma das listas é vazia supõe-se que a parte correspondente da fracção, na igualdade precedente, toma o valor 1.

No *software* Maple esta função tem a seguinte expressão gramatical:

$$\text{hypergeom}([n_1, n_2, \dots, n_p], [d_1, d_2, \dots, d_q], z).$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+k)!(y+k)!z^k}{x!y!k!} = \text{hypergeom}([x+1, y+1], \emptyset, z); \\ 2) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+ct)^k (\lambda\alpha t)^{k+1}}{k!(k+1)!} = \lambda\alpha t \text{hypergeom}(\emptyset, [2], (u+ct)\lambda\alpha t); \\ 3) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x!(y)!(w+k)!(z^2+z-1)^k}{w!(x+k)!(y+k)!k!} = \text{hypergeom}([w+1], [x+1, y+1], z^2+z-1). \end{aligned}$$

Enquanto na primeira expressão o vector d correspondente ao cociente de funções Γ no denominador de $F(n, d, z)$ é vazio, (nestes casos podemos representar esse facto por $[]$ ou pelo símbolo \emptyset), na segunda expressão é o vector n correspondente ao numerador que é vazio.

ANEXO IV

EXEMPLOS DE PROGRAMAS EM MAPLE

Exemplo 1 - Programação da expressão (5.98) - indenizações particulares com distribuição $\Gamma(2, 2)$

```

beta:=2:lambda:=1:c:=1.1
Digits:=36:nd:=200:
cj1:=array(0..nd):cj1[0]:=0:
cvar1:=(1-(1+1.1*z^3)^(1/2)-1.1*z^2)/(2.2*z^2-2*z-4):
csvar1:=series(cvar1,z=0,nd):
for i from 1 to nd do
    csvar1:=diff(csvar1,z)/i:cj1[i]:=eval(csvar1,z=0):
end do:
for u from 0 by 1 to 10 do
    print (u);
    for t from 0 by 1 to 10 do
        sigma:=0:
        for j from 1 to nd/2 do
            sigma:=sigma+(4*t)^j/j!*((2^(-2*j+1))*(u+1.1*t)
            +cj1[2*j-2]*(u+1.1*t))*hypergeom([], [3/2, 1+j], (u+1.1*t)^2*t)+(2^(-2*j)
            +cj1[2*j-1])*hypergeom([], [1/2, 1+j], (u+1.1*t)^2*t)):
        end do:
        sigma:=1-sigma*exp(-t-2.2*t-2*u):print (sigma);
    end do:
end do:

```

Exemplo 2 - Programação da expressão (7.24) - tempos inter-sinistros e indenizações particulares com distribuição $\Gamma(2, 2)$

```

s:=1: Digits:=36:
for i from 1 to 15 do
    b:=simplify((eval(s,[u=u+y+y/10-x,t=t-y]))*16*x*y*exp(-2*x-2*y)):
    a:=(int(b,x=0..u+y+y/10));
    s:=(int(a,y=0..t))+(1+2*t)*exp(-2*t);
    s:=simplify(s,{exp(-21/5*t)=M});s:=eval(s,[M=exp(-21/5*t)]):
    print(evalf(eval(s,[u=0,t=10])),evalf(eval(s,[u=1,t=10])),evalf(eval(s,[u=2,t=10])));
end do:
for t1 from 1 to 10 do
    print(evalf(eval(s,[u=1,t=t1])),evalf(eval(s,[u=2,t=t1])),evalf(eval(s,[u=10,t=t1])));
end do:

```